

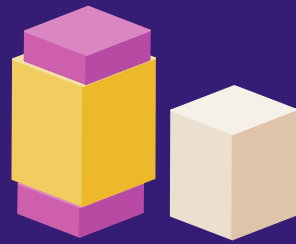
8.4 Integral Tak-Wajar II

Sofwah Ahmad
Wono Setya Budhi





Integral Tak Wajar II



- ❖ Sekali lagi, pada bentuk $\int_a^b f(x) dx$, fungsi $f(x)$ haruslah terbatas.
- ❖ Jika kita mengabaikan asumsi ini maka hasil integral yang diperoleh bisa salah, sebagai contoh

$$\int_{-2}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-2}^1 = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} < 0 \quad \text{padahal} \quad \frac{1}{x^2} > 0$$

- ❖ Kemudian bagaimana menghitung integral pada fungsi tidak terbatas?
- ❖ Hampiri integral sehingga saat melakukan pengintegralan, fungsi yang diintegrasikan terbatas.

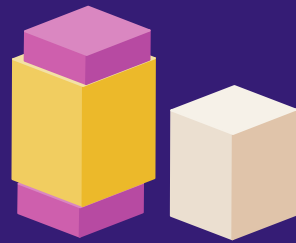


Integral Tak Wajar :

Integran (Fungsi) Tak-
Terbatas di Batas



Integral Tak Wajar II : $f(x)$ Tak Terbatas di Batas



Definisi 4 : Arti Integral dengan Fungsi Tak Hingga (Pada Batas)

Misalkan fungsi f kontinu pada himpunan interval setengah buka $[a, b)$ dan misalkan pula kita mempunyai bentuk $\lim_{x \rightarrow b^-} |f(x)| = \infty$. Maka

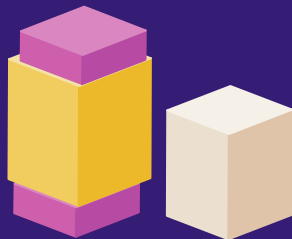
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

asalkan limit ruas kanan ada. Integral di ruas kiri disebut sebagai integral tak-wajar.

- ❖ Jika $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx$ ada maka $\int_a^b f(x) dx$ dikatakan **konvergen**, jika tidak ada maka $\int_a^b f(x) dx$ dikatakan divergen.
- ❖ Perhatikan untuk $t < b$, $\int_a^t f(x) dx$ bentuk yang sudah dipelajari dengan f terbatas pada $[a, t]$.



Contoh



1. Hitung $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

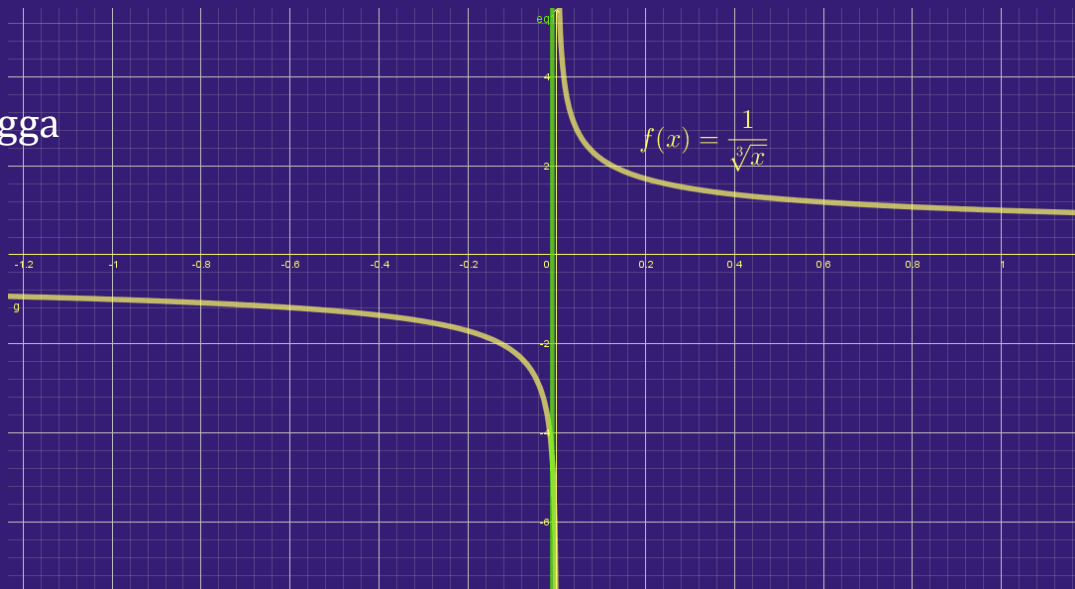
Perhatikan bahwa $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$, sehingga

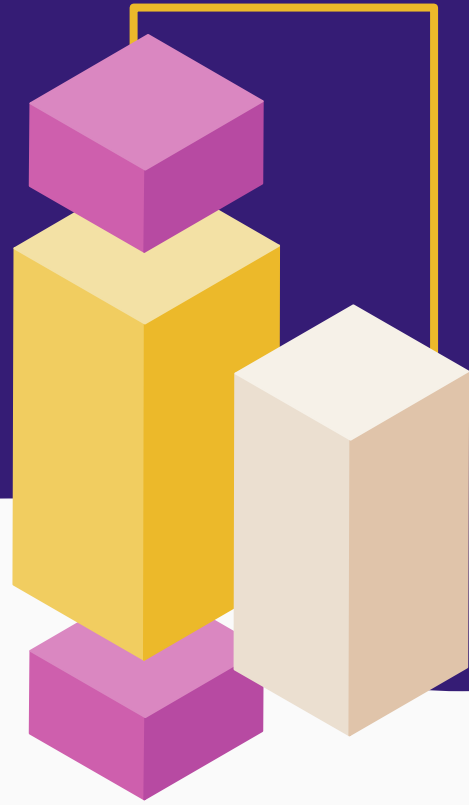
$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left. \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \right|_{-1}^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{3}{2} (t^{\frac{2}{3}} - 1)$$

$$= -\frac{3}{2}$$





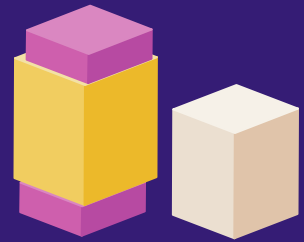
Integral Tak Wajar :

Integran (Fungsi) Tak-
Terbatas di Titik Dalam



Integral Tak Wajar II: $f(x)$ Tak Terbatas

pada titik
interior



Definisi 5 : Arti Integral dengan Fungsi Tak Hingga (Pada Titik Dalam)

Misalkan fungsi f kontinu pada interval $[a, b]$ kecuali mungkin di $c \in (a, b)$. Misalkan pula kita punya bentuk $\lim_{x \rightarrow c^\pm} |f(x)| = \infty$. Maka

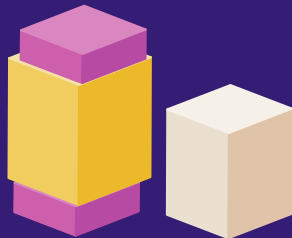
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

asalkan limit di ruas kanan masing-masing konvergen.

❖ Perhatikan pada bentuk ini kita perlu identifikasi titik c .



Contoh



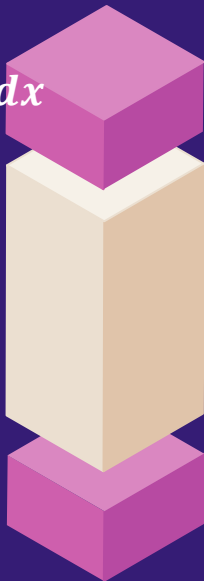
2. Hitung nilai $\int_{-2}^1 \frac{1}{x} dx$, jika ada.

❖ Perhatikan bahwa $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ (fungsi f tidak terbatas pada $x = 0$)

❖ Kita meninjau integral $\int_{-2}^0 \frac{1}{x} dx$ dan $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^0 \frac{1}{x} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-2}^t \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} [\ln |x|]_{-2}^t \\ &= -\infty\end{aligned}$$

Jadi $\int_{-2}^1 \frac{1}{x} dx$ divergen

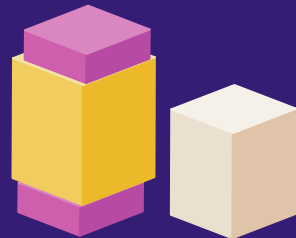


Pengerjaan berikut **salah** (Mengapa?)

$$\begin{aligned}\int_{-2}^0 \frac{1}{x} dx &= \int_{-2}^0 \frac{1}{x} dx + \int_0^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_{-2}^{-c} \frac{1}{x} dx + \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} ([\ln |x|]_{-2}^{-c} + [\ln |x|]_c^1) \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} (\ln c - \ln 2) + (\ln 1 - \ln c) \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} -\ln 2 = -\ln 2\end{aligned}$$



Latihan



1. Jika ada, hitunglah

a) $\int_0^3 \frac{x}{(x-1)^{2/3}} dx$ b) $\int_{-3}^3 \frac{x}{9-x^2} dx$

2. **(Integral Tak wajar → Integral wajar)**
dengan bantuan integral parsial

a) Buktikan

$$\int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 1 - \frac{2\sqrt{c}}{c+1} + 2 \int_c^1 \frac{\sqrt{x}}{(1+x)} dx$$

b) Hitung

$$\int_c^1 \frac{\sqrt{x}}{(1+x)} dx$$

3. Jika $\lim_{x \rightarrow 0^+} |f(x)| = \infty$, arti dari

$$\int_0^\infty f(x) dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(x) dx$$

dengan bilangan 1 bisa diganti dengan yang lain, asalkan kedua integral ruas kanan konvergen.

Berdasarkan hal ini selidiki kekonvergenan dari

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p} dx$$

untuk berbagai nilai $p > 0$.

Terima Kasih !

CREDITS: This presentation template was created by Slidesgo, including icons by Flaticon, and infographics & images by Freepik.

Please keep this slide for attribution.

