

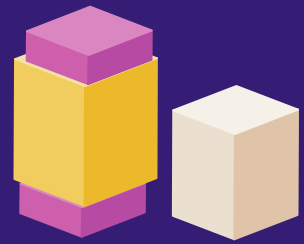
8.3 Integral Tak-Wajar I

Sofwah Ahmad
Wono Setya Budhi





Integral Tak Wajar



❖ Pada saat kita membahas definisi $\int_a^b f(x) dx$ dengan mengasumsikan

1. Daerah integrasi merupakan daerah yang terbatas $[a, b]$
2. Fungsi $f(x)$ merupakan fungsi yang terbatas karena meninjau

$$\sup_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \& \quad \inf_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

- ❖ Bagaimana jika salah satu dari asumsi tersebut tidak dipenuhi?
- ❖ Dalam hal itu, disebut integral tak wajar.

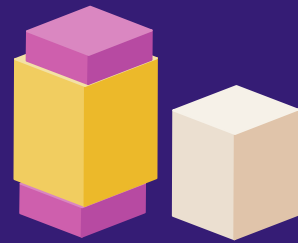


Integral Tak Wajar I:

Daerah Integrasi
(1 Sisi) Tak-Terbatas



Integral Tak Wajar : salah satu sisi ∞



❖ Jika daerah integrasi berbentuk $[a, \infty)$ maka cara yang wajar adalah

Hampiri $[a, \infty)$ dengan $[a, b] \Rightarrow$ Buat b membesar yakni tinjau $\lim_{b \rightarrow \infty}$

Definisi 1 : Arti Integral dengan Batas Tak Hingga

Misalkan f fungsi yang terbatas dan terdefinisi pada $[a, \infty)$. Arti dari

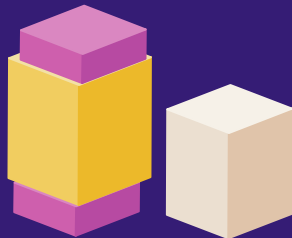
$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

asalkan limit di ruas kanan ada. Integral di ruas kiri disebut sebagai integral tak-wajar jenis pertama.

Jika $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ ada maka $\int_a^{\infty} f(x) dx$ dikatakan **konvergen**, jika tidak ada maka $\int_a^{\infty} f(x) dx$ dikatakan divergen.



Contoh



1. Jika ada, hitunglah $\int_{-1}^{\infty} x e^{-x^2} dx$

Pertama kita hitung bentuk yang terbatas terlebih dahulu. Ambil $b \in \mathbb{R}$

Misalkan
 $u = x^2$
 $du = 2 dx$

$$\int_{-1}^b x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-u} \right]_1^{b^2} = \frac{1}{2} e^{-1} - \frac{1}{2} e^{-b^2}$$

Selanjutnya pandang limitnya

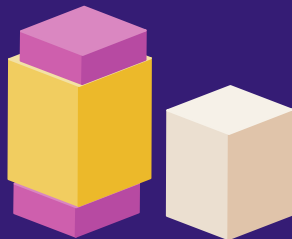
$$\int_{-1}^{\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-1}^b x e^{-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} e^{-1} - \frac{1}{2} e^{-b^2} \right) = \frac{1}{2} e^{-1}$$

Jadi

$$\int_{-1}^{\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2e}$$



Contoh

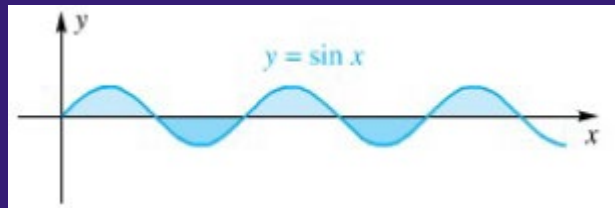


2. Jika ada, hitunglah $\int_0^{\infty} \sin x \, dx$

Seperti sebelumnya, ambil $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \sin x \, dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \sin x \, dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [-\cos x]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} 1 - \cos b\end{aligned}$$

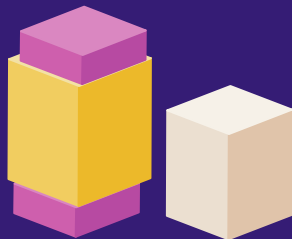
Perhatikan untuk $b \rightarrow \infty$, $1 - \cos b$ tidak menuju suatu nilai tertentu, sehingga kita menyimpulkan $\int_0^{\infty} \sin x \, dx$ **divergen**.



Apakah hasil yang diperoleh masuk akal?
Apa interpretasi geometris dari
 $\int_0^{\infty} \sin x \, dx$?



Contoh



3. Jika ada, hitunglah $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$

Seperti sebelumnya, ambil $b \in \mathbb{R}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln |x|]_1^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b$$

$$= \infty$$

Jadi dapat disimpulkan $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ divergen

COBA : Selidiki kekonvergenan dari

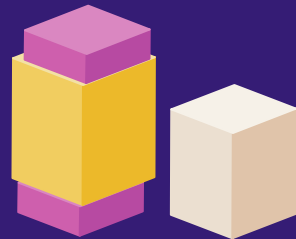
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

Untuk kasus $0 < p < 1$ dan $p > 1$





Uji Banding



- ❖ Seringkali kita ingin menentukan kekonvergenan suatu integral tanpa menghitung nilainya. Untuk itu kita menggunakan uji banding

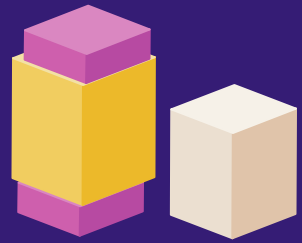
Misalkan $0 \leq f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \geq 0$

- Jika $\int_0^\infty f(x) dx$ divergen, maka $\int_0^\infty g(x) dx \dots$
- Jika $\int_0^\infty g(x) dx$ konvergen, maka $\int_0^\infty f(x) dx \dots$

Catatan : Jika $\int_0^\infty g(x) dx$ divergen maka tidak dapat diambil kesimpulan mengenai kekonvergenan $\int_0^\infty f(x) dx$. Begitu pula jika $\int_0^\infty f(x) dx$ konvergen, maka tidak dapat diambil kesimpulan untuk $\int_0^\infty g(x) dx$.



Contoh(gagal)



4. Gunakan uji banding untuk menyelidiki apakah $\int_1^{\infty} \frac{2+e^{-x}}{x} dx$ konvergen!

Misalkan $f(x) = \frac{2+e^{-x}}{x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{e^x x}$. Kita ingin mencari suatu fungsi pembanding $h(x)$

yang kekonvergenan integralnya telah kita ketahui sebelumnya

Jika kita meninjau untuk $x > 1$

$$e^x > 1$$

Karena untuk $x > 1, f(x) < h(x)$

$$\Leftrightarrow x e^x > x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^x x} < \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x} + \frac{1}{e^x x} < \frac{3}{x} = h(x)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{2+e^{-x}}{x} dx < 3 \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$



???

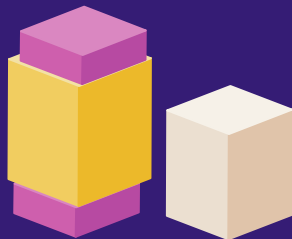


(divergen)

Tidak dapat diambil
kesimpulan.
Cari pembanding
yang lain!



Contoh



4. Gunakan uji banding untuk menyelidiki apakah $\int_1^{\infty} \frac{2+e^{-x}}{x} dx$ konvergen!

Misalkan $f(x) = \frac{2+e^{-x}}{x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{e^x x}$. Kita ingin mencari suatu fungsi pembanding $h(x)$ yang kekonvergenan integralnya telah diketahui sebelumnya

Namun jika kita meninjau

$$e^{-x} > 0 \quad \text{karena untuk } x > 1$$

$$\Leftrightarrow 2 + e^{-x} > 2 > 1 \quad \frac{1}{x} < \frac{2 + e^{-x}}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 + e^{-x}}{x} > \frac{1}{x} \quad \text{dan}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx < \int_1^{\infty} \frac{2 + e^{-x}}{x} dx$$

(divergen)

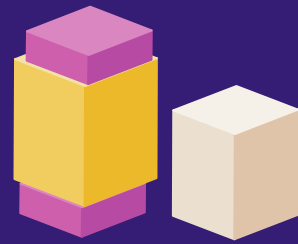
Maka berdasarkan uji banding

$$\int_1^{\infty} \frac{2 + e^{-x}}{x} dx$$

divergen



Integral Tak Wajar : salah satu sisi ∞



- ❖ Sebagaimana halnya batas atas tak terhingga, jika daerah integrasi berbentuk $(-\infty, b]$ maka cara yang wajar adalah

Hampiri $(-\infty, b]$ dengan $[a, b] \Rightarrow$ Buat a mengecil yakni tinjau $\lim_{a \rightarrow -\infty}$

Definisi 2 : Arti Integral dengan Batas Tak Hingga

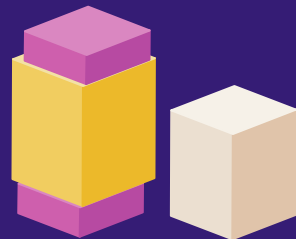
Misalkan f fungsi yang terdefinisi pada $(-\infty, b]$. Arti dari

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

asalkan limit dari sisi kanan ada.



Latihan



1. Hitunglah

a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$, jika $p > 1$

b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$, jika $0 < p < 1$

2. Selidiki kekonvergenan integral berikut. Gunakanlah uji banding

a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4(x^4 + 1)} dx$

b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2(\ln x + 1)} dx$

c) $\int_1^{\infty} \frac{1}{1 + \sin x + x^8} dx$

3. **(Paradoks Terompet Jibril)** Misalkan terompet Jibril ialah benda yang diperoleh hasil memutar daerah yang dibatasi kurva $y = \frac{1}{x}$ pada $[1, \infty)$ terhadap sumbu x

a) Hitung volume terompet tersebut.

b) Hitung luas permukaan benda tersebut yakni

$$L = 2\pi \int_1^{\infty} f(x) \sqrt{1 + f'(x)} dx$$

Penuntun : $\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3} > \frac{\sqrt{x^4}}{x^3} = \frac{1}{x}$

c) Ternyata kita peroleh jika terompet diisi cat hingga penuh, maka cat tersebut tidak cukup untuk mengecat permukaan terompet, mengapa hal ini bisa terjadi?

Terima Kasih !

CREDITS: This presentation template was created by Slidesgo, including icons by Flaticon, and infographics & images by Freepik.

Please keep this slide for attribution.

