

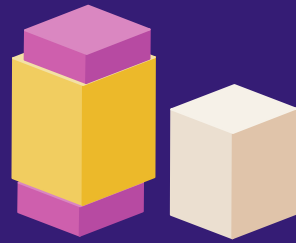
8.2 Bentuk-Bentuk Tak-Tentu Lain

Sofwah Ahmad
Wono Setya Budhi





Bentuk Tak Tentu Lainnya



- ❖ Sebelumnya kita telah mempelajari jika $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ maka

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\text{Aturan L'Hospital})$$

- ❖ Pertanyaan : Apakah aturan L'Hopital berlaku umum untuk syarat yang lain seperti

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty, \quad \text{atau saat} \quad a^+, a^-, a \rightarrow \pm\infty$$

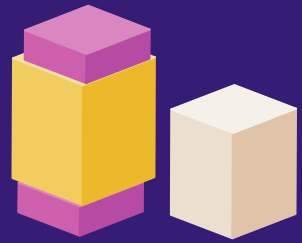
- ❖ Perhatikan jika $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$ maka bentuk

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$$

memenuhi hipotesa Aturan L'Hospital



Bentuk Tak Tentu Lainnya



- ❖ Perhatikan jika $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$ maka bentuk

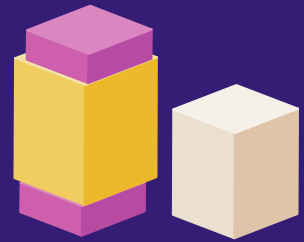
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$$

memenuhi hipotesa Aturan L'Hospital

- ❖ Dengan demikian $\lim_{x \rightarrow a} \frac{-\frac{g'(x)}{(g(x))^2}}{-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \frac{(f(x))^2}{(g(x))^2} = L \neq 0, \pm\infty$ (anggap), maka
- ❖ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} = L$, dengan demikian $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = \frac{1}{L}$ atau $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$



Bentuk Tak Tentu II : $\frac{\infty}{\infty}$



Aturan L'Hopital : Bentuk ∞/∞

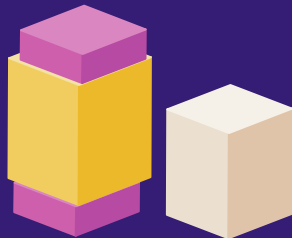
Misalkan $\lim_{x \rightarrow u} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow u} |g(x)| = \infty$. Jika $\lim_{x \rightarrow u} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$ atau $+\infty/-\infty$ maka

$$\lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dengan u dapat diganti dengan $a, a^+, a^-, -\infty, \infty$



Contoh



1. Misalkan $a \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$. Apa artinya?

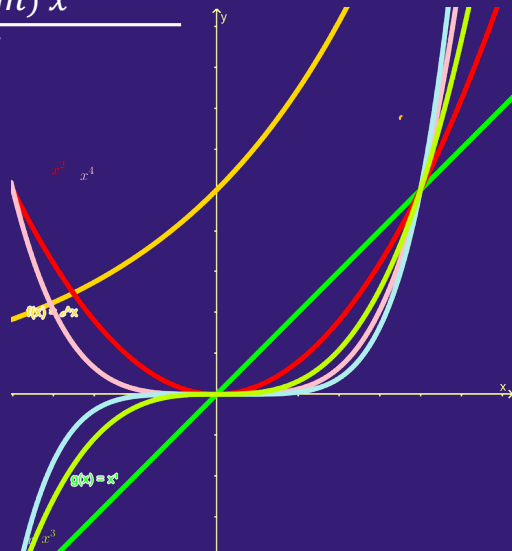
Jika $a \leq 0$ maka jelas terbukti. Sekarang perhatikan jika $a > 0$ maka

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a x^{a-1}}{e^x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(a-1) x^{a-2}}{e^x} \stackrel{L}{=} \dots \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(a-1)\dots(a-m) x^{a-m-1}}{e^x}$$

Jika m adalah bilangan sehingga $a - m > 0$ dan $a - m - 1 \leq 0$

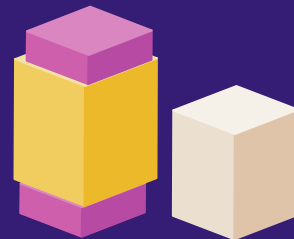
maka $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$

Ini artinya saat $x \rightarrow \infty$,
nilai e^x jauh lebih besar
dibandingkan x^a .





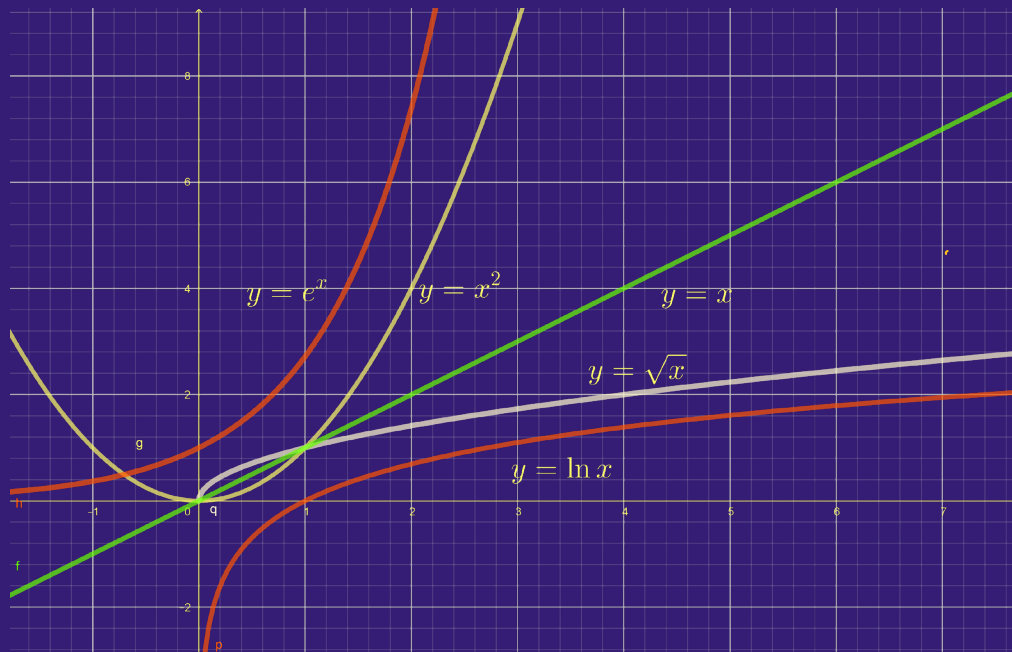
Contoh

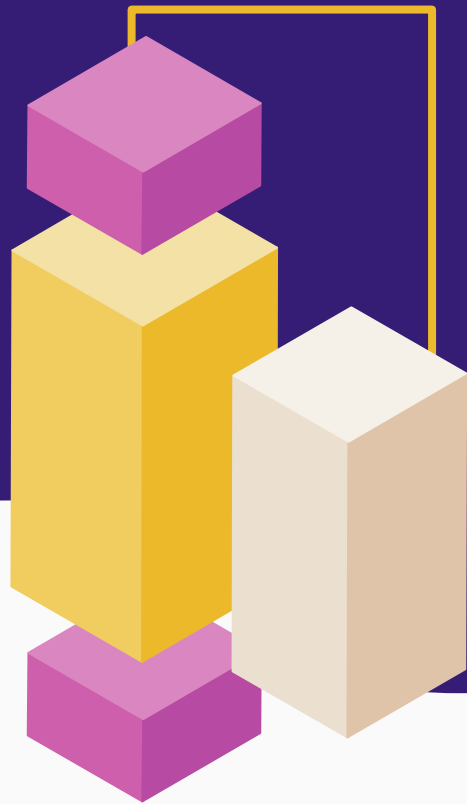


2. Misalkan $a > 0$. Buktikan bahwa $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$. Apa artinya?

Perhatikan jika $a > 0$ maka

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} &\stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{a x^{a-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{a x^a} \\ &= 0 \end{aligned}$$



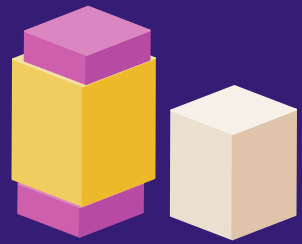


Bentuk Tak-Tentu

$0 \cdot \infty$ dan $\infty - \infty$



Bentuk Tak Tentu $0 \cdot \infty$ dan $\infty - \infty$



- ❖ Perhatikan kembali bentuk

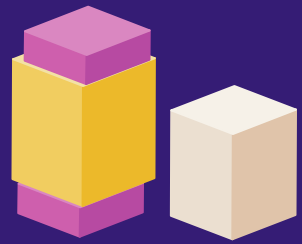
$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -2^+} (x - 2) \frac{1}{x^2 - 4}$$

- ❖ Kedua limit di atas memiliki kesamaan bentuk $0 \cdot \infty$
- ❖ Seperti pembahasan bentuk $0/0$ yang lalu, hasil masing-masing limit **tidak menentu**, yakni 1 dan ∞ (bisa berhingga atau tak hingga)
- ❖ Secara umum, bentuk tak tentu $0 \cdot \infty$ dapat diubah menjadi bentuk $\frac{0}{1/\infty} = \frac{0}{0}$
- ❖ Sedangkan untuk bentuk $\infty - \infty$ lakukan manipulasi aljabar sehingga diperoleh bentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$



Contoh $(0 \cdot \infty)$



3. Misalkan $a \in \mathbb{R}^+$. Buktikan bahwa $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x \cdot \ln(\sin x) = 0$.

Perhatikan $\lim_{x \rightarrow \pi/2} |\tan x| = \infty$ dan $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \ln(\sin x) = 0$. Ubah jadi bentuk $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x \cdot \ln(\sin x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{1/\tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\cot x}$$

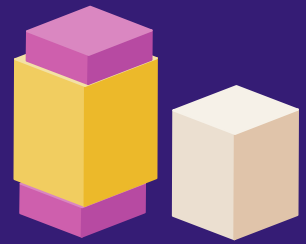
$$\stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1/\sin x \cdot \cos x}{-\csc^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2} -\cos x \cdot \sin x = 0$$





Contoh $(\infty - \infty)$



4. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} \\&\stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \cdot \frac{1}{x} + \ln x - 1}{(x-1) \cdot \frac{1}{x} + \ln x} \\&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x}{(x-1) + x \ln x} \\&\stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 + \ln x}{2 + \ln x} \\&= 1/2\end{aligned}$$



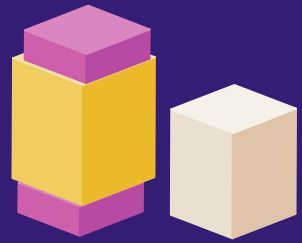


Bentuk Tak-Tentu

$$0^0, \infty^0, 1^\infty$$



Bentuk Tak Tentu $0^0, \infty^0, 1^\infty$



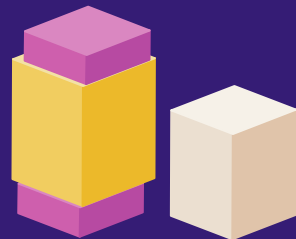
- ❖ Ingat kembali bahwa $\ln(x)$ fungsi kontinu di $(0, \infty)$, sehingga jika $f(x)^{g(x)}$ kontinu dan bernilai positif, kita mempunyai

$$\ln \left[\lim_{x \rightarrow a} (f(x)^{g(x)}) \right] = \lim_{x \rightarrow a} \ln [f(x)^{g(x)}] = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)$$

- ❖ Jika $\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x)^{g(x)} = L$ maka $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)^{g(x)}) = e^L$
- ❖ Jadi limit dengan bentuk $0^0, \infty^0, 1^\infty$ diselesaikan dengan cara meninjau bentuk logaritmanya (agar diperoleh bentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$)



Bentuk Tak Tentu $0^0, \infty^0, 1^\infty$



❖ Dengan **meminjam notasi bentuk** dan meninjau logaritmanya, maka

1. Bentuk 0^0 : Tinjau $\ln 0^0 \Rightarrow 0 \ln 0 \Rightarrow 0 \cdot \infty \Rightarrow \frac{0}{1/\infty} \Rightarrow \frac{0}{0}$

2. Bentuk ∞^0 : Tinjau $\ln \infty^0 \Rightarrow 0 \ln \infty \Rightarrow \frac{\ln \infty}{1/0} \Rightarrow \frac{\infty}{\infty}$

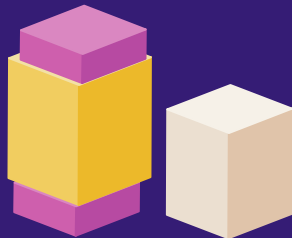
3. Bentuk 1^∞ : Tinjau $\ln 1^\infty \Rightarrow \infty \ln 1 \Rightarrow \infty \cdot 0 \Rightarrow \frac{\infty}{\infty}$ atau $\frac{0}{0}$

❖ Ketiga limit tersebut bisa diselesaikan dengan aturan L'Hopital

❖ Sekali lagi jika $\lim_{x \rightarrow a} \ln f(x)^{g(x)} = L$ maka $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)^{g(x)}) = e^L$



Contoh



5. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1)^{\cot x}$.

Perhatikan bahwa $\lim_{x \rightarrow 0^+} x + 1 = 1$ dan $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x = +\infty$, sehingga soal berbentuk 1^∞

Tinjau $\ln$. Misalkan $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1)^{\cot x}$, maka

$$\ln L = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1)^{\cot x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x + 1)^{\cot x})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x \cdot \ln(x + 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x + 1)}{\tan x}$$

$$\overset{L}{\ln L} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/(x + 1)}{\sec^2 x}$$

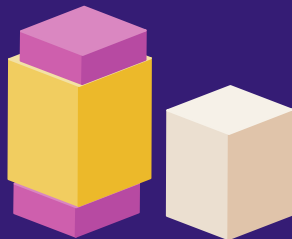
$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^2 x}{x + 1}$$

$$= 1$$

Jadi $L = e^1 = e$



Contoh



6. Tentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} (\tan x)^{\cos x}$.

Karena $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \tan x = \infty$ dan $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \cos x = 0$, sehingga soal berbentuk ∞^0

Tinjau ln. Misalkan $L = \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} (\tan x)^{\cos x}$, maka

$$\ln L = \ln \left(\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} (\tan x)^{\cos x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} (\ln(\tan x)^{\cos x})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \cos x \cdot \ln(\tan x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\ln(\tan x)}{\sec x}$$

$$\overset{L}{\ln L} = \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x}{\sec x \cdot \tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\sec x}{\tan^2 x}$$

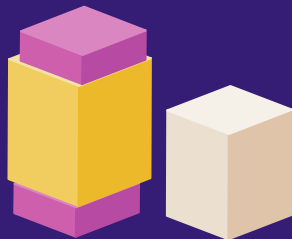
$$= \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= 1$$

$$\text{Jadi } L = e^1 = e$$



Latihan



1. Hitunglah

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \csc^2 x - \cot^2 x$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \csc x - \frac{1}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\csc^2 x - \frac{1}{x} \right)^2$

2. Jika ada, tentukan nilai dari

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} - x$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1 + x^2} - x)$

3. Hitunglah

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1^x + 2^x)^{1/x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1^x + 2^x)^{1/x}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1^x + 2^x)^{1/x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1^x + 2^x)^{1/x}$

4. Hitunglah $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$ dan $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$

Dapatkah kita gunakan aturan L'Hopital?

Terima Kasih !

CREDITS: This presentation template was created by Slidesgo, including icons by Flaticon, and infographics & images by Freepik.

Please keep this slide for attribution.

