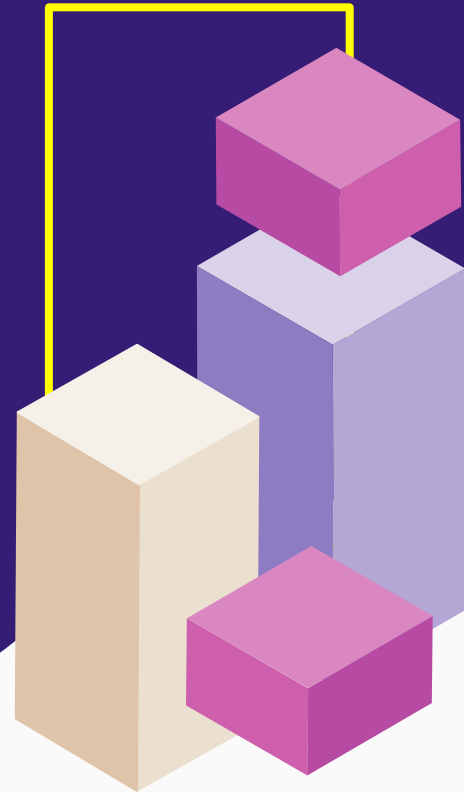


Bentuk Tak Tentu & Integral Tak Wajar

Sofwah Ahmad
Wono Setya Budhi

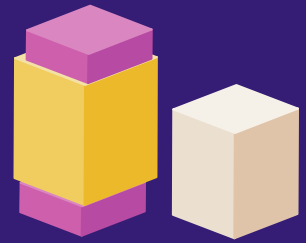


8.1 Bentuk Tak-Tentu $\frac{0}{0}$





Bentuk Tak Tentu I



Bentuk pecahan $\frac{0}{0}$!

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 4}$$

Penyelesaian tidak bisa **langsung** memanfaatkan aljabar limit (ada pembagian dengan 0).

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ (Bukti geometris panjang)}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = 6$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{x^2 + 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+2} = \infty$$

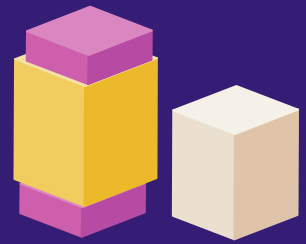
Walau bentuk sama tapi hasil **tak menentu**

Adakah cara penyelesaian seragam untuk bentuk $\frac{0}{0}$?

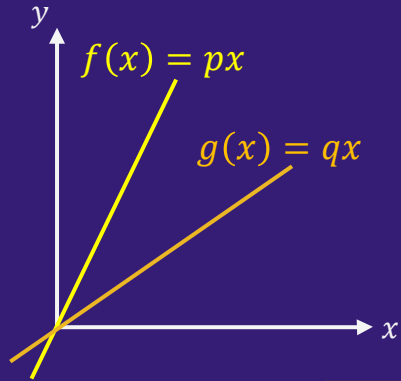




Bentuk Tak Tentu I: $\frac{0}{0}$



Pandang fungsi $f(x) = px$ dan $g(x) = qx$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{px}{qx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p}{q} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bentuk ini berlaku umum untuk fungsi yang memenuhi syarat tertentu.

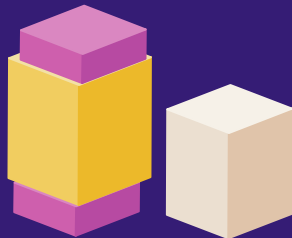
Aturan L'Hospital : Bentuk 0/0

Misalkan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Jika $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$ atau $+\infty/-\infty$ maka

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$



Contoh



1. Hitung $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ dan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$. Apa artinya?

a) Karena $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ dan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

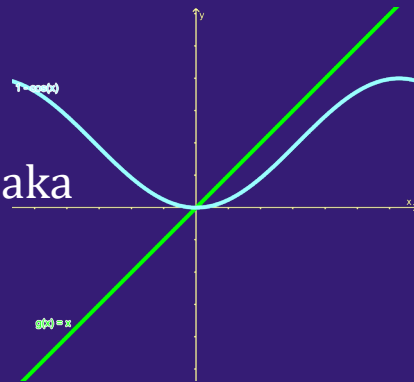
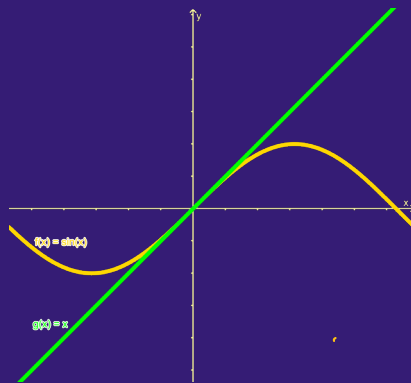
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Untuk seterusnya, dalam menjawab cukup dituliskan

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

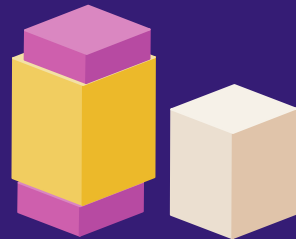
b) Karena limit merupakan bentuk $\frac{0}{0}$, dan syarat L'Hospital dipenuhi, maka

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0$$





Contoh

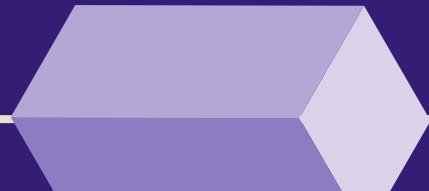


2. Hitung $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$ dan $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 4x + 4}$

Karena kedua limit memiliki bentuk $0/0$, dan syarat L' Hospital dipenuhi (uji!!!), berdasarkan aturan L'Hospital diperoleh

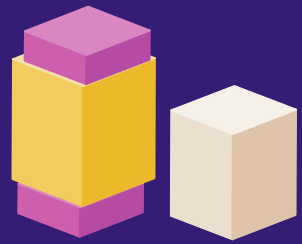
$$\square \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{2x - 1} = \frac{6}{5}$$

$$\square \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 4x + 4} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x + 3}{2x - 4} = \infty$$





Contoh (Penggunaan L'Hopital Berulang)



3. Hitung $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

Karena limit memiliki bentuk $0/0$, dan syarat aturan L'Hospital dapat digunakan, maka

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}$$

(Bentuk $\frac{0}{0}$, gunakan kembali L'Hospital)

$$\stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x}$$

(Bentuk $\frac{0}{0}$, gunakan kembali L'Hospital)

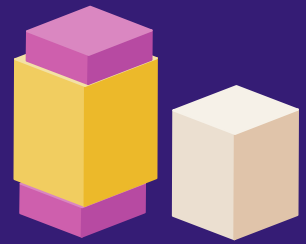
$$\stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{6}$$

(Bukan bentuk $\frac{0}{0}$, hitung biasa)

$$= -\frac{1}{6}$$



Contoh (Penggunaan L'Hopital Berulang)

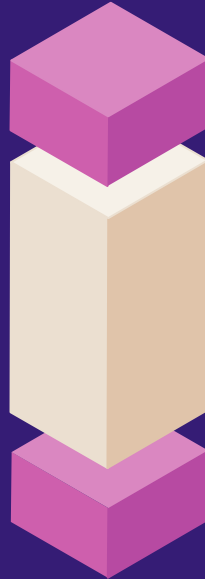


4. Hitung $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 + 3x}$

Pengerjaan berikut **salah** (Mengapa?)

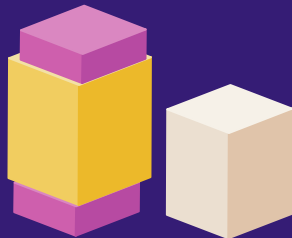
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 + 3x} &\stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x + 3} \\ &\stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Bagaimana seharusnya?





Latihan



1. Hitunglah

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\ln(1+x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 + 3x}$

2. Dengan menganggap bahwa aturan L'Hospital berlaku untuk $a'' = \infty$, Tentukan

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x^{-1}}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

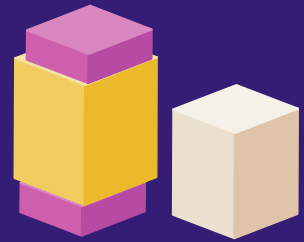
b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2}$

3. Hitunglah $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\tan x}$. Dapatkah kita gunakan aturan L'Hospital?



Pengantar Bukti Teorema L'Hospital



- Ingat kembali Teorema Nilai Rata-rata untuk turunan
- Jika f kontinu pada $[a, b]$ dan terturunkan pada (a, b) maka ada $c_1 \in (a, b)$ sehingga
$$f(b) - f(a) = f'(c_1)(b - a)$$
- Jika g kontinu pada $[a, b]$ dan terturunkan pada (a, b) maka ada $c_2 \in (a, b)$ sehingga
$$g(b) - g(a) = g'(c_2)(b - a)$$
- Jika $c_1 = c_2 = c$ maka

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)(b - a)}{g'(c)(b - a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Secara umum belum tentu $c_1 = c_2$.

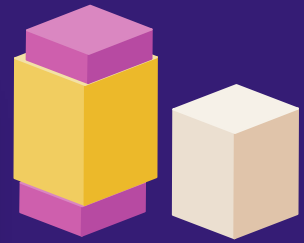
Apakah kita dapat memilih sehingga

$$c_1 = c_2 ?$$

Teorema Nilai Rata-rata Cauchy

Misalkan fungsi f, g terturunkan pada (a, b) dan kontinu pada $[a, b]$. Jika $g'(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in (a, b)$ maka terdapat $c \in (a, b)$ sehingga

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)(b-a)}{g'(c)(b-a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$



Pandang fungsi

$$s(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a))$$

- ✓ $s(x)$ terturunkan pada (a, b) dan kontinu pada $[a, b]$
- ✓ $s(a) = s(b) = 0$
- ✓ Berdasarkan TNR terdapat $c \in (a, b)$ sehingga

$$s'(c) = \frac{s(b) - s(a)}{(b - a)} = \frac{0 - 0}{(b - a)} = 0$$

Di sisi lain

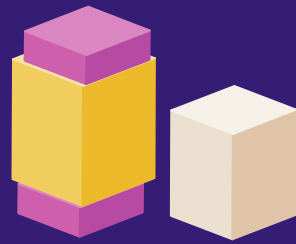
$$s'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$$

$$0 = s'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c)$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$



Bukti Teorema L'Hopital



Pembuktian hanya akan dilakukan untuk $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}$

Perhatikan dari penulisan $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ tersirat

- ❖ f' dan g' ada (untuk suatu daerah $(a, b]$)
- ❖ $g'(x) \neq 0$ pada daerah $(a, b]$ tersebut

Sehingga dengan syarat $f(a) = g(a) = 0$ dan Teorema Nilai Rata-rata Cauchy ($b = x$) disimpulkan terdapat $c \in (a, x)$ sehingga

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Terima Kasih !

CREDITS: This presentation template was created by Slidesgo, including icons by Flaticon, and infographics & images by Freepik.

Please keep this slide for attribution.

