

Daftar Isi

1	Mengapa Perlu Belajar Geometri	1
1.1	Daftar Pustaka	1
2	Ruang Euclid	3
2.1	Geometri Euclid	8
2.2	Pencerminan dan Transformasi di Geometri Euclid	10
2.2.1	Translasi	10
2.2.2	Pencerminan Terhadap Garis	11
2.2.3	Rotasi	14
2.2.4	Titik Tetap dan Garis Tetap	16
2.3	Isometri	19
2.4	Pengantar ke Group	22

Bab 1

Mengapa Perlu Belajar Geometri

Kita sudah mempelajari tentang matriks, baik di aljabar linear atau ilmu lain. Umumnya berkaitan dengan perhitungan mengenai besaran yang berkaitan dengan matriks itu sendiri, misalkan determinan, trace dan lain sebagainya. Saat ini kita akan mempelajari matriks berkaitan dengan geometri.

Pada aljabar linear, kita mulai dengan matriks

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

sebarang dan kemudian mulai dari sangat khusus. Di Geometri, kita mulai dengan sebaliknya. Seperti kita mengetahui bahwa matriks berkaitan dengan transformasi, di geometri kita akan mempelajari transformasi yang berkaitan dengan geometri Euclid, yaitu mengawetkan jarak. Setelah kita melihat struktur transformasi yang mengawetkan jarak, kita akan membuang beberapa syarat yang sangat ketat tersebut.

Tahap kedua, kita akan mempelajari hal yang berkaitan dengan geometri yang mengawetkan kesejajaran atau affine. Pada tahap ini kita mempelajari arti geometri dari operasi baris elementer yang telah dipelajari di aljabar linear.

Pada geometri di atas, dua buah garis di geometri tersebut tidak harus berpotongan. Hal ini menyulitkan. Arah kita adalah mencari geometri di mana setiap dua buah garis selalu berpotongan. Geometri ini melengkapi geometri dari Euclid. Pada geometri tersebut, jika ada garis l dan titik P di luar garis tersebut, maka hanya ada satu garis yang melalui P dan sejajar garis l .

Untuk lengkapnya, akan dicari geometri di mana setiap garis yang melalui titik P , tidak akan berpotongan dengan garis l .

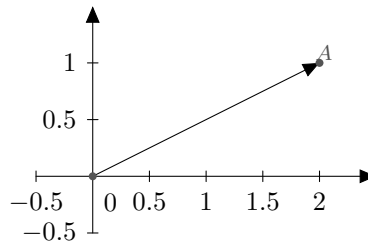
1.1 Daftar Pustaka

1. Patrick J. Ryan, Euclidean and Non-Euclidean Geometry, An Analytic Approach, Cambridge University Press, 1989
2. George E. Martin, Transformation Geometry, UTM, Springer Verlag, 1982

Bab 2

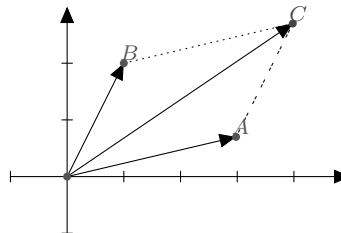
Ruang Euclid

Pada saat permulaan, kuliah ini akan bekerja di bidang, yaitu himpunan $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Titik (x, y) di $\mathbb{R}^2$ dapat dipandang sebagai titik saja, tetapi juga dapat dipandang sebagai ujung dari vektor yang berpangkal $(0, 0)$ dan berakhir di (x, y) . Untuk mudahnya, di bagian kedua kita akan menyebut sebagai vektor (x, y) .



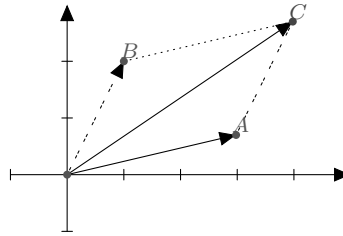
Sebagai koleksi vektor, kita dapat memandang $\mathbb{R}^2$ sebagai ruang vektor (ada vektor istimewa yaitu vektor $(0, 0)$). Dengan demikian kita dapat mendefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian skalar. Misalkan (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) dua vektor, hasil penjumlahan keduanya adalah vektor

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$



Selain dengan aturan jajaran genjang, akan lebih mudah menggunakan aturan segitiga. Dengan anggapan bahwa suatu vektor dapat digeser, maka penjumlahan di atas dapat digam-

barkan sebagai



Dengan aturan segitiga, penjumlahan

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$$

Mulai dari titik O bergerak ke A dilanjutkan ke C , dapat dipandang mulai dari O berakhir di C .

Perhatikan bahwa

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XC}$$

dengan X adalah sebarang titik.

Cobalah 1!. Ujilah bahwa operasi penjumlahan vektor tersebut memenuhi

1. Untuk setiap $\mathbf{x} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{y} = (x_2, y_2)$ dan $\mathbf{z} = (x_3, y_3)$ di bidang memenuhi sifat asosiatif, yaitu

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$$

2. Untuk setiap $\mathbf{x} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{y} = (x_2, y_2)$ di bidang, penjumlahan memenuhi sifat komutatif, yaitu

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

3. Ada vektor $O(0,0)$ sehingga untuk setiap $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ di bidang berlaku $\mathbf{x} + O = \mathbf{x}$.

4. Untuk setiap $\mathbf{x}$ di bidang ada vektor $\mathbf{y}$ di bidang sehingga $\mathbf{x} + \mathbf{y} = O$.

Selain penjumlahan vektor, di bidang juga ada perkalian skalar, yaitu perkalian antara bilangan dan vektor. Jika $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ dan α suatu bilangan atau skalar, maka

$$\alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

Khususnya $\mathbf{x} + \mathbf{x} = 2\mathbf{x}$. Hal ini juga berlaku secara umum seperti pada soal berikut

Cobalah 2!. Ujilah bahwa perkalian skalar tersebut memenuhi

1. Untuk setiap bilangan α, β dan vektor $\mathbf{x}$ di bidang, maka

$$(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$$

Kesesuaian operasi skalar dan operasi penjumlahan bilangan real.

2. Untuk setiap bilangan α, β dan vektor $\mathbf{x}$ di bidang, maka

$$(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$$

Kesesuaian operasi skalar dan operasi perkalian bilangan real.

3. Untuk setiap bilangan α dan vektor $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ di bidang, maka

$$\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$$

Kesesuaian operasi skalar dan operasi penjumlahan vektor.

4. Untuk setiap vektor $\mathbf{x}$, maka $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Hasil Kali Dalam

Untuk mengukur sudut antara dua vektor, kita memerlukan hasil kali dalam, yaitu untuk setiap vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ dan $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2$$

Cobalah 3!. Ujilah bahwa hasil kali dalam tersebut memenuhi

1. Untuk setiap vektor $\mathbf{x}$ berlaku

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$$

dan $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2. Untuk setiap vektor $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ berlaku

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$$

3. Untuk setiap vektor $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ dan bilangan α berlaku

$$\langle \alpha\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

Panjang vektor

Untuk setiap vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ kita mempunyai panjang vektornya yaitu

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Cobalah 4!. Misalkan $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ dua vektor di bidang. Definisikan $f(t) = \|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\| = \langle \mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{x} + t\mathbf{y} \rangle$

1. Jelaskan mengapa $f(t) \geq 0$ untuk setiap $t \in \mathbb{R}$.
2. Tuliskan $f(t)$ dalam bentuk $at^2 + bt + c$ dan tuliskan syarat agar $f(t) \geq 0$ untuk setiap t . Syarat yang diperoleh disebut pertidaksamaan Cauchy-Schwartz.

Cobalah 5!. Bukti lain dari Cauchy Schwartz.

1. Misalkan $\|\mathbf{x}\| = 1$ dan $\|\mathbf{y}\| = 1$. Gunakan $\|\mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{y}\| \geq 0$ untuk membuktikan bahwa $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq 1$.
2. Gunakan hasil di (1) untuk membuktikan bahwa ketaksamaan Cauchy Schwartz.

Jarak

Jika diketahui dua titik P, Q , kita akan mendefinisikan jarak antara kedua titik sebagai

$$d(P, Q) = \|P - Q\|$$

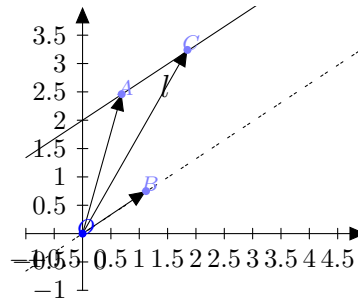
Bidang $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ yang dilengkapi dengan jarak ini disebut sebagai bidang Euclid.

Cobalah 6!. Ujilah bahwa jarak dua titik memenuhi hal berikut

1. Untuk setiap P, Q berlaku $d(P, Q) \geq 0$
2. $d(P, Q) = 0$ jika dan hanya jika $P = Q$
3. Untuk setiap P, Q berlaku $d(P, Q) = d(Q, P)$
4. Untuk setiap P, Q, R berlaku $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$ (disebut pertaksamaan segitiga). Tanda kesamaan terjadi jika P, Q, R segaris.

Garis

Kita sudah mengenal persamaan garis di bidang yaitu $ax + by = c$ dengan $a^2 + b^2 \neq 0$. Garis juga dapat disajikan dalam bentuk vektor.



Misalkan diketahui garis l , dan misalkan A terletak pada garis tersebut. Misalkan pula $\vec{u} = \overrightarrow{OB}$ merupakan vektor yang sejajar garis tersebut. Selanjutnya, jika C terletak pada garis, maka

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + t\vec{u}$$

untuk suatu bilangan $t \in \mathbb{R}$, dengan $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ vektor posisi titik A . Persamaan terakhir ini disebut **persamaan garis** dalam bentuk vektor.

Cobalah 7!. Tuliskan persamaan garis $2x + y = 6$ dalam bentuk vektor dengan menentukan vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{u}$.

Penuntun: Vektor $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ dengan P, Q dua titik di garis.

Untuk selanjutnya, kita akan menuliskan

$$[\vec{u}] = \{t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

sehingga persamaan garis di atas akan ditulis sebagai $\vec{a} + [\vec{u}]$. Untuk pendeknya bicara, garis tersebut melalui titik $\vec{a}$ atau titik $\vec{a}$ terletak pada garis.

Cobalah 8!. Diketahui dua garis $\vec{a} + [\vec{u}]$ dan $\vec{b} + [\vec{v}]$

1. Apa syarat kedua garis sejajar?
2. Apa syarat kedua garis tegak lurus?
3. Apa syarat kedua garis berpotongan?

2.1 Geometri Euclid

Pada geometri Euclid ada dua elemen yang menjadi dasar, yaitu titik dan garis. Kita sudah mempunyainya. Masalahnya, apakah sifat titik dan garis ini sesuai dengan titik dan garis pada geometri Euclid. Ternyata titik dan garis yang ada memenuhi yang diminta pada geometri Euclid.

Proposition 1 *Melalui dua buah titik dapat dibuat sebuah garis.*

Proof. Misalkan titik tersebut P dan Q . Selanjutnya, ambillah vektor arah tersebut $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$, maka setiap titik X di garis dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX} \\ &= \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{PQ}\end{aligned}$$

■

Untuk selanjutnya, jika kita menuliskan titik P , kita mengartikan sebagai vektor $\overrightarrow{OP}$.
Cobalah 9!. Misalkan diketahui garis l dan titik P di luar garis tersebut. Buktikan bahwa ada satu garis melalui P dan sejajar garis l .

Jika P dan Q dua titik, maka titik X di garis tersebut dapat dituliskan

$$\begin{aligned}X(t) &= P + t(Q - P) \\ &= (1 - t)P + tQ\end{aligned}$$

dengan $t \in \mathbb{R}$.

Cobalah 10!. Gambarkan untuk berbagai posisi X untuk nilai t . Khususnya jika $0 < t < 1$ maka posisi titik X terletak di antara P dan Q , dan untuk $t = \frac{1}{2}$, titik X merupakan titik tengah dari P dan Q .

Cobalah 11!. Kita akan membuktikan bahwa P, Q, R segaris (artinya ada t sehingga $R = (1 - t)P + tQ$) jika dan hanya jika $d(P, R) + d(R, Q) = d(P, Q)$

1. Misalkan $R = (1 - t)P + tQ$ untuk suatu $t \in [0, 1]$. Buktikan bahwa $d(P, R) + d(R, Q) = d(P, Q)$.
Penuntun: Hitung $d(P, R), d(R, Q)$ dinyatakan dalam $d(P, Q)$.
2. Sebaliknya, misalkan $d(P, R) + d(R, Q) = d(P, Q)$, buktikan ada $t \in \mathbb{R}$ sehingga $R = (1 - t)P + tQ$.
Penuntun: Jika $d(P, R) + d(R, Q) = d(P, Q)$, gunakan penulisan hasil kali dalam.

Sistem Orthogonal

Misalkan diketahui dua vektor $\{u, v\}$ yang saling orthogonal, yaitu memenuhi $\langle u, v \rangle = 0$. Himpunan seperti ini disebut himpunan orthogonal. Jika panjang dari masing-masing vektor adalah 1, maka himpunan ini disebut himpunan orthonormal.

Salah satu keuntungan dari himpunan orthonormal, misalkan X sebarang vektor di $\mathbb{R}^2$, maka

$$X = \langle X, u \rangle u + \langle X, v \rangle v$$

Perhatikan bahwa koefisien dari masing-masing vektor tidak saling berkaitan, sehingga mudah dicari.

Cobalah 12!. Misalkan diketahui dua garis $X = P + [u]$ dan $X = Q + [v]$ dan $\{u, v\}$ himpunan orthonormal. Kita akan membuktikan bahwa kedua garis berpotong. Pertama, kita mengetahui bahwa ada bilangan α, β sehingga

$$P - Q = \alpha u + \beta v$$

1. Hitunglah bilangan α dan β .
2. Di manakah posisi titik $P - \alpha u$ di garis pertama atau kedua.
3. Di manakah posisi titik $Q + \beta v$ di garis pertama atau kedua.
4. Buktikan bahwa kedua garis berpotongan. Tentukan vektor titik potong dinyatakan dalam P, Q, u, v .

Cobalah 13!. Misalkan diketahui garis $X = P + [u]$. Kita dapat melengkapi sehingga $\{u, N\}$ sehingga menjadi himpunan orthogonal dengan $\|N\| = 1$. Buktikan bahwa setiap titik X di garis juga memenuhi

$$\langle X - P, N \rangle = 0$$

2.2 Pencerminan dan Transformasi di Geometri Euclid

Pada bagian ini kita akan mempelajari transformasi $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ yaitu fungsi yang membawa satu titik ke titik yang lain. Jika $P \in \mathbb{R}^2$ titik tersebut ditransform (diubah) menjadi titik $T(P) = P'$. Di geometri, kita akan mempelajari transformasi yang mengawetkan jarak atau isometri. Transformasi $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ disebut isometri jika untuk setiap dua titik P, Q berlaku

$$\|T(P) - T(Q)\| = \|P - Q\|$$

Kita akan melihat beberapa transformasi yang mengawetkan jarak.

2.2.1 Translasi

Salah satu transformasi yang paling sederhana adalah translasi, yaitu pergeseran. Misalkan $P(x, y)$, hasil translasi titik P oleh vektor (a, b) adalah titik $P'(x + a, y + b)$ dan ditulis $\tau_{(a,b)}(x, y) = (x + a, y + b)$. Dalam bentuk matriks, translasi dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

atau dalam bentuk persamaan

$$\begin{aligned} x' &= x + a \\ y' &= y + b \end{aligned}$$

Cobalah 14!. Misalkan diketahui translasi $\tau_{(a,b)}$. Buktikan bahwa $\|\tau_{(a,b)}P - \tau_{(a,b)}Q\| = \|P - Q\|$. Dengan demikian translasi merupakan transformasi yang bersifat isometri.

Cobalah 15!. Selidiki apakah $\tau_{(a,b)}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \tau_{(a,b)}(x_1, y_1) + \tau_{(a,b)}(x_2, y_2)$. Selidiki juga apakah $\tau_{(a,b)}(kx_1, ky_1) = k\tau_{(a,b)}(x_1, y_1)$ dengan k merupakan konstanta. Apakah translasi bersifat linear?

Cobalah 16!. Misalkan diketahui translasi $\tau_{(a,b)}$ dan $\tau_{(c,d)}$.

1. Carilah satu translasi pengganti $\tau_{(a,b)} \circ \tau_{(c,d)}$ atau $\tau_{(a,b)}(\tau_{(c,d)}(x, y))$ yaitu translasi berturutan.
2. Carilah satu translasi pengganti untuk $\tau_{(c,d)} \circ \tau_{(a,b)}$ atau $\tau_{(c,d)}(\tau_{(a,b)}(x, y))$.
3. Apakah masing-masing translasi pengganti tersebut sama atau beda. Ujilah!

Cobalah 17!. Misalkan kita mengumpulkan semua translasi dalam suatu himpunan Trans. Ujilah bahwa sifat-sifat berikut berlaku

1. Jika τ_1 dan τ_2 dua translasi, maka $\tau_1 \circ \tau_2$ juga merupakan translasi.
2. Untuk setiap translasi τ_1, τ_2, τ_3 berlaku

$$\tau_1 \circ (\tau_2 \circ \tau_3) = (\tau_1 \circ \tau_2) \circ \tau_3$$

Sifat ini disebut sifat asosiatif. Hasil dari sifat ini, kita dapat melakukan transformasi berturutan dari lebih dari dua translasi berturutan.

3. Ada translasi τ_0 dengan sifat $\tau_0(x, y) = (x, y)$.
Translasi ini disebut translasi nol. Perhatikan bahwa translasi nol ini juga disebut identitas $I(x, y) = (x, y)$.
4. Jika τ_1 suatu translasi, maka ada translasi lain τ_2 sehingga $\tau_1 \circ \tau_2 = I = \tau_2 \circ \tau_1$.

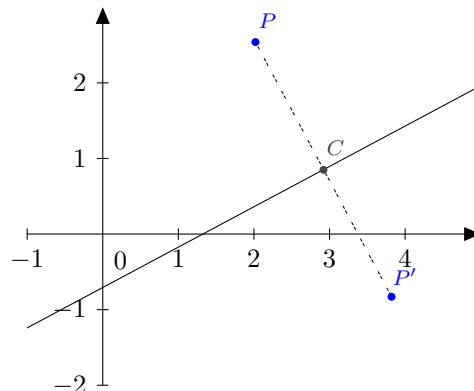
Cobalah 18!. Jika $\tau_1(x, y) = (x + a, y + b)$ suatu translasi, tentukan translasi τ_2 yang mempunyai sifat $\tau_1 \circ \tau_2 = I = \tau_2 \circ \tau_1$.

Cobalah 19!. Misalkan $P(x_P, y_P)$ dan $Q(x_Q, y_Q)$ dua titik di bidang, buktikan bahwa ada translasi yang mentranslasi titik P ke titik Q . Translasi ini ditulis sebagai $\tau_{P,Q}$.

Cobalah 20!. Misalkan P, Q, R tiga titik yang tidak segaris. Buktikan bahwa $\tau_{P,Q} = \tau_{R,S}$ jika dan hanya jika $PQRS$ merupakan jajaran genjang.

2.2.2 Pencerminkan Terhadap Garis

Misalkan kita mempunyai sebuah garis l , dan titik P di bidang tersebut. Hasil pencerminan titik P oleh garis l adalah titik P' sehingga garis PP' tegak lurus dengan l , dan berpotongan di titik tengah dari P dan P' .



Pencerminkan terhadap garis l akan ditulis sebagai Ω_l . Perhatikan bahwa komposisi dua pencerminan

$$\Omega_l \circ \Omega_l = I$$

atau $\Omega_l \Omega_l = I$ kembali menjadi identitas.

Cobalah 21!. Misalkan diketahui garis $x = 3$ dan diketahui pula titik $P(-1, 2)$, $Q(4, 1)$ dan $R(3, -4)$. Tentukan koordinat hasil pencerminan masing-masing titik ke garis $x = 3$.

Cobalah 22!. Misalkan diketahui garis $x = a$ dan titik $P(x_0, y_0)$. Tentukan hasil pencerminan titik P terhadap garis yang diketahui. Ujilah rumus yang diperoleh dengan menggunakan Cobalah 21.

Cobalah 23!. Misalkan diketahui garis $ax + by + c = 0$ dan titik $P = (x_0, y_0)$ sebarang. Kita akan mencari peta $P' = (x'_0, y'_0)$ hasil pencerminan titik P oleh garis. Untuk menentukan koordinat P' diperlukan dua persamaan.

1. Tentukan koordinat titik tengah dari P dan P' , misalkan titik tengah tersebut Q .
2. Persamaan pertama, titik Q berada di garis tersebut.
3. Persamaan kedua yang dipenuhi oleh koordinat titik P' dapat diperoleh dengan melalui kenyataan bahwa garis PP' tegak lurus terhadap garis yang ada.
4. Berdasarkan langkah (2) dan (3), tentukan koordinat P' dinyatakan dalam koordinat P dan a, b, c .
5. Apakah hubungan antara (x_0, y_0) dan hasil pencerminan dapat dituliskan dalam bentuk matriks?

Cobalah 24!. Jika l sebarang garis, buktikan bahwa Ω_l merupakan isometri.

Cobalah 25!. Misalkan diketahui garis $y = x \tan \theta$. Selanjutnya, carilah hasil pencerminan titik (x_0, y_0) oleh garis tersebut. Apakah hubungan antara (x_0, y_0) dan hasil pencerminan dapat dituliskan dalam bentuk matriks?

Misalkan diketahui garis $\langle X - Q, N \rangle = 0$ dan $P(x_0, y_0)$. Dengan menggunakan vektor, tentukan hasil pencerminan titik P oleh garis yang diketahui.

Cobalah 26!. Misalkan diketahui garis $x = 3$ dan $x = 5$ dan titik $P(x_0, y_0)$.

1. Carilah hasil pencerminan titik P oleh garis pertama dan kemudian yang kedua!
2. Apakah kalian mengenali hasil pencerminan berturut-turut tersebut sebagai satu transformasi?
3. Carilah hasil pencerminan titik P oleh garis kedua dan kemudian yang pertama!
4. Apakah kalian mengenali hasil pencerminan berturut-turut tersebut sebagai satu transformasi? Apakah ada perbedaan dengan hasil di (2).

Cobalah 27!. Misalkan diketahui dua garis sejajar $\langle X - P, N \rangle = 0$ dan $\langle X - Q, N \rangle = 0$.

1. Selanjutnya, carilah transformasi pengganti dari pencerminan terhadap garis pertama diikuti pencerminan garis kedua!
2. Carilah transformasi pengganti dari pencerminan terhadap garis kedua diikuti pencerminan garis pertama.
Apakah ada perbedaan antara (1) dan (2).

Cobalah 28!. Misalkan diketahui tiga garis sejajar $l : \langle X - P, N \rangle = 0$, $m : \langle X - Q, N \rangle = 0$ dan $n : \langle X - R, N \rangle = 0$. Kita sudah melihat bahwa pencerminan secara berturutan dapat diganti dengan translasi. Selidikilah transformasi pengganti dari tiga kali pencerminan terhadap garis sejajar.

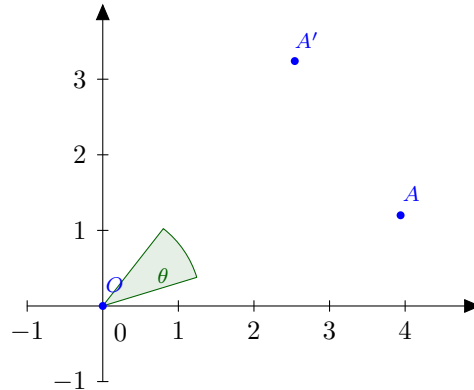
Cobalah 29!. Misalkan diketahui garis $l : x = 3$ dan $m : x = 5$, dan garis $n : x = a$.

1. Tentukan garis k sehingga $\Omega_m \Omega_l = \Omega_k \Omega_n$.
2. Tentukan garis p sehingga $\Omega_m \Omega_l = \Omega_n \Omega_p$.
3. Tentukan garis q sehingga $\Omega_l \Omega_m = \Omega_q \Omega_n$.
4. Tentukan garis r sehingga $\Omega_l \Omega_m = \Omega_n \Omega_r$.

Cobalah 30!. Misalkan diketahui n garis sejajar. Carilah pengganti satu transformasi dari pencerminan berturutan terhadap n garis tersebut. Bedakan antara n sebagai bilangan ganjil dan genap.

2.2.3 Rotasi

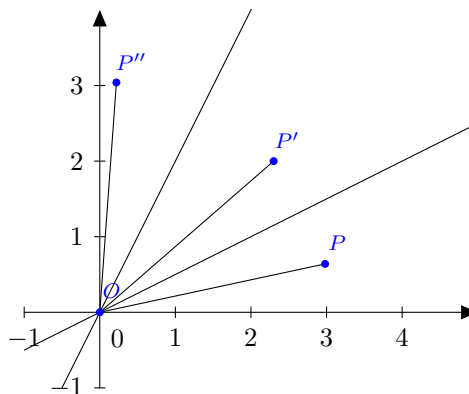
Misalkan diketahui titik O dan sudut θ . Hasil rotasi titik P dengan pusat O sebesar sudut θ adalah putaran titik P dengan pusat O sebesar sudut θ .



Cobalah 31!. Kita akan mencari hasil rotasi titik $P(x, y)$ dengan pusat $O(0, 0)$ dengan sudut θ .

1. Buktikan bahwa hasil rotasi titik $(1, 0)$ dengan pusat O dengan sudut θ adalah $(\cos \theta, \sin \theta)$.
2. Buktikan bahwa hasil rotasi titik $(0, 1)$ dengan pusat O dengan sudut θ adalah $(-\sin \theta, \cos \theta)$.
3. Buktikan bahwa hasil rotasi titik (x, y) dengan pusat O dengan sudut θ adalah

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' &= y \sin \theta + x \cos \theta \end{aligned}$$



Cobalah 32!. Misalkan diketahui garis $y = x \tan \alpha$ dan $y = x \tan \beta$.

1. Tentukan hasil pencerminan titik (x_0, y_0) oleh garis pertama diikuti oleh garis kedua. Dapatkah pencerminan berturutan tersebut dapat diganti dengan satu transformasi!
2. Tentukan hasil pencerminan titik (x_0, y_0) oleh garis kedua diikuti oleh garis pertama. Dapatkah pencerminan berturutan tersebut dapat diganti dengan satu transformasi! Apakah ada perbedaan transformasi yang pertama dan kedua.

Cobalah 33!. Misalkan ada tiga garis $y = x \tan \alpha$, $y = x \tan \beta$ dan $y = x \tan \gamma$.

1. Lakukan pencerminan berturutan terhadap tiga garis yang diketahui, mulai dengan garis no1, 2 dan diikuti dengan yang 3. Apakah transformasi yang ada dapat diganti dengan satu transformasi yang telah dikenali?
2. Lakukan pencerminan berturutan terhadap tiga garis yang diketahui, mulai dengan garis no 3, 2 dan diikuti dengan yang 1. Apakah transformasi yang ada dapat diganti dengan satu transformasi yang telah dikenali?
3. Apa perbedaan antara (1) dan (2).

Cobalah 34!. Misalkan l dan m dua garis yang berpotongan di P . Misalkan n garis ketiga yang melalui P .

1. Carilah garis k sehingga $\Omega_l \Omega_m = \Omega_n \Omega_k$.
2. Carilah garis p sehingga $\Omega_l \Omega_m = \Omega_p \Omega_p$.

Cobalah 35!. Misalkan $R_{A,\theta}$ dan $R_{A,\psi}$. Selidiki transformasi dari $R_{A,\theta} R_{A,\psi}$ dan $R_{A,\psi} R_{A,\theta}$.

Cobalah 36!. Diketahui n garis yang semuanya melalui titik O . Kemudian dilakukan pencerminan berturutan terhadap n garis tersebut. Dapatkah pencerminan berturutan tersebut dapat diganti dengan transformasi yang anda kenali.

Cobalah 37!. Misalkan $R_{A,\theta}$ dan $R_{B,\psi}$. Selidiki transformasi dari $R_{A,\theta} R_{B,\psi}$ dan $R_{B,\psi} R_{A,\theta}$ jika $A \neq B$.

Cobalah 38!. Misalkan diketahui dua garis m, n yang saling tegak lurus yang berpotongan di

titik P .

1. Misalkan X sebuah titik, dan kita mencari

$$\Omega_m \Omega_n (X) \text{ dan } \Omega_n \Omega_m (X)$$

Apakah kedua sama?

2. Buktikan bahwa titik tengah antara $\Omega_m \Omega_n (X)$ dan X adalah titik P . Oleh karena itu transformasi ini juga disebut sebagai transformasi setengah putaran dengan pusat P dan ditulis sebagai σ_P

Cobalah 39!. Misalkan Q titik tengah P dan Q .

1. Carilah komposisi $\sigma_Q \sigma_P$ dan $\sigma_R \sigma_Q$ sebagai satu transformasi yang telah anda kenali.
2. Dapatkah anda buktikan hal di atas tanpa menggunakan komputer!

Cobalah 40!. Diketahui tiga titik P, Q, R yang tidak segaris, carilah $\sigma_R \sigma_Q \sigma_P$ sebagai suatu transformasi yang anda kenali. Apakah ada keistimewaan antara tiga titik ini dengan objek baru. Bagaimana dengan $\sigma_P \sigma_Q \sigma_R$? Dapatkah anda buktikan hal di atas tanpa menggunakan komputer!

Cobalah 41!. Ujilah apakah benar atau tidak, bahwa $\sigma_P \tau_{A,B} \sigma_P = \tau_{C,D}$ dengan $C = \sigma_P (A)$ dan $D = \sigma_P (B)$.

2.2.4 Titik Tetap dan Garis Tetap

Definition 2 Misalkan T suatu transformasi. Titik A disebut titik tetap dari T jika $T(A) = A$.

Definition 3 Misalkan T suatu transformasi. Garis l disebut garis tetap jika setiap titik $P \in l$, maka $T(P) \in l$ juga.

Cobalah 42!. Misalkan P, Q dua titik. Selidiki apakah $T = \tau_{P,Q}$ mempunyai titik tetap. Bagaimana dengan garis tetap.

Cobalah 43!. Misalkan l sebuah garis. Selidiki apakah $T = \Omega_l$ mempunyai titik tetap. Bagaimana dengan garis tetap.

Cobalah 44!. Misalkan $R_{P,\theta}$ adalah suatu rotasi dengan pusat P dan sudut θ . Selidiki apakah $T = R_{P,\theta}$ mempunyai titik tetap. Bagaimana dengan garis tetap.

Cobalah 45!. Misalkan l sebuah garis dan m, n dua garis yang tegak lurus terhadap l .

1. Selidiki titik tetap $\Omega_l \Omega_m \Omega_n$ dan $\Omega_m \Omega_n \Omega_l$. Apa perbedaan antara keduanya?
2. Selidiki titik tetap $\Omega_l \Omega_m \Omega_n$ dan $\Omega_l \Omega_n \Omega_m$. Apa perbedaan antara keduanya?

Cobalah 46!. Misalkan α, β dan γ tiga garis.

1. Jika ketiga garis sejajar, sederhanakan pemetaan $\Omega_\alpha \Omega_\beta \Omega_\gamma$.
2. Jika ketiga garis melalui sebuah titik P , sederhanakan pemetaan $\Omega_\alpha \Omega_\beta \Omega_\gamma$.

Cobalah 47!. Misalkan α, β dan γ tiga garis sebarang (tiga sejajar dan tidak melalui sebuah titik).

1. Misalkan α dan β berpotongan di P , dan tariklah l melalui P tegak lurus terhadap γ . Carilah garis m sehingga

$$\Omega_\alpha \Omega_\beta = \Omega_m \Omega_l$$

2. Misalkan F adalah titik potong garis l dan γ . Tariklah garis n tegak lurus terhadap m dan n' garis yang tegak lurus terhadap n dan melalui F . Ujilah bahwa

$$\Omega_l \Omega_\gamma = \Omega_{n'} \Omega_n = \sigma_F$$

3. Carilah tiga buah garis p, q dan r sehingga

$$\Omega_\alpha \Omega_\beta \Omega_\gamma = \Omega_p \Omega_q \Omega_r$$

dengan dua dari p, q, r merupakan dua garis dan garis ketiga tegak lurus terhadap dua garis pertama.

Definition 4 Misalkan l sebuah garis dan m, n dua garis yang tegak lurus terhadap sebuah garis l . Pemetaan $\Omega_m \Omega_n \Omega_l$ (yaitu translasi diikuti dengan pencerminan suatu garis tetap) disebut refleksi geser.

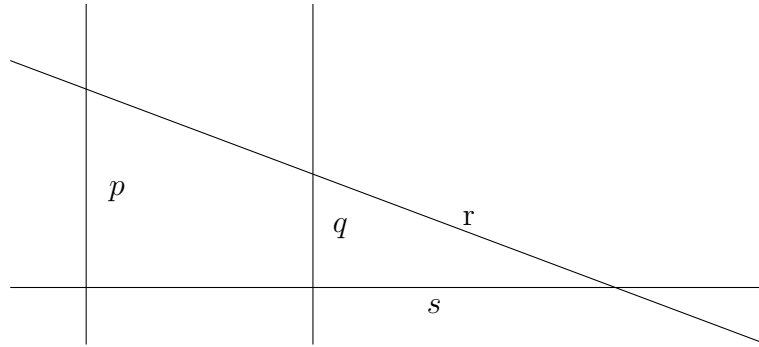
Cobalah 48!. Misalkan T suatu refleksi geser dan Ω_α suatu pencerminan terhadap sebuah garis l . Selidiki kemungkinan hasil transformasi $T\Omega_\alpha$. Apakah $T\Omega_\alpha = \Omega_\alpha T$.

Cobalah 49!. Misalkan a, b dua garis dan P sebarang titik. Carilah garis c, d , misalkan garis c melalui P , sehingga

$$\Omega_b \Omega_a = \Omega_d \Omega_c$$

Cobalah 50!. Misalkan diketahui 4 garis p, q, r, s dengan posisi seperti di Gambar berikut.

1. Carilah garis m, l sehingga $\Omega_s \Omega_r \Omega_q \Omega_p = \Omega_m \Omega_l$



2. Carilah garis n, k sehingga $\Omega_p \Omega_q \Omega_r \Omega_s = \Omega_n \Omega_k$

Cobalah 51!. Misalkan diketahui empat garis p, q, r dan s . Tentukan satu titik P sebarang

1. Carilah dua garis r' dan q' dengan q' melalui titik P sehingga $\Omega_r \Omega_q = \Omega_{r'} \Omega_{q'}$
2. Carilah dua garis r'' dan m dengan r'' melalui titik P sehingga $\Omega_s \Omega_{r''}$
3. Jelaskan mengapa $\Omega_s \Omega_r \Omega_q \Omega_p$ dapat diganti dengan pencerminan dua garis. Carilah dua garis tersebut.

Cobalah 52!. Misalkan diketahui n garis sebarang. Kenalilah kemungkinan pemetaan berturutan dari n garis tersebut.

2.3 Isometri

Misalkan diketahui $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometri, yaitu untuk setiap titik P, Q di $\mathbb{R}^2$, maka jarak dari dua titik peta sama dengan jarak dua titik semula, atau

$$d(T(P), T(Q)) = d(P, Q)$$

Oleh karena itu transformasi isometri disebut juga sebagai transformasi yang mengawetkan jarak. Dengan menggunakan notasi panjang vektor, pemetaan isometri dapat ditulis sebagai

$$\|P - Q\| = \|T(P) - T(Q)\| \quad (2.1)$$

Cobalah 53!. Misalkan T suatu isometri dan misalkan $T(0) = A$, definisikan pemetaan

$$S(x, y) = T(x, y) - A$$

1. Buktikan bahwa $S(O) = O$ dengan O adalah titik $(0, 0)$.
2. Buktikan bahwa S juga mengawetkan jarak.

Berdasarkan Cobalah yang terakhir ini, kita cukup membahas isometri T dengan $T(O) = O$.

Cobalah 54!. Misalkan T suatu isometri dengan $T(0) = 0$. Dengan memanfaatkan (2.1), buktikan bahwa $\|P\| = \|T(P)\|$ untuk setiap titik P di $\mathbb{R}^2$.

Selanjutnya, misalkan kita ambil dua titik P, Q , cobalah berikut akan membawa kita memperlihatkan bahwa $\angle POQ = \angle T(P)OT(Q)$.

Cobalah 55!.

1. Untuk sembarang dua titik P, Q buktikan bahwa

$$\|P - Q\|^2 = \|P\|^2 - 2\langle P, Q \rangle + \|Q\|^2$$

dengan memanfaatkan sifat norm atau panjang vektor.

2. Demikian pula halnya

$$\|T(P) - T(Q)\|^2 = \|T(P)\|^2 - 2\langle T(P), T(Q) \rangle + \|T(Q)\|^2$$

3. Jika T suatu isometri dengan $T(O) = O$, buktikan bahwa

$$\langle T(P), T(Q) \rangle = \langle P, Q \rangle$$

dan dengan definisi $\cos \angle POQ$ dan $\cos \angle T(P)OT(Q)$, buktikan bahwa $\cos \angle T(P)OT(Q) = \cos \angle POQ$.

Cobalah 56!. Apa kesimpulan anda tentang isometri dan transformasi pencerminan garis? Jelaskan!

Kita akan memperlihatkan bahwa isometri mengawetkan bentuk geometri lainnya.

Proposition 5 Misalkan $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ merupakan isometri, dan l garis, maka

$$T(l) = \{T(P) : P \in l\}$$

juga merupakan garis.

Proof. Misalkan P, Q dan R dua titik di garis l . Dengan demikian

$$d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q)$$

Karena T merupakan isometri, maka

$$d(T(P), T(Q)) = d(T(P), T(R)) + d(T(R), T(Q))$$

Jadi $T(Q)$ terletak pada garis yang melalui $T(P), T(R)$. Oleh karena itu peta garis l adalah sebuah garis. ■

Cobalah 57!. Misalkan T transformasi yang bersifat isometri.

1. Misalkan l dan m dua garis yang saling tegak lurus. Apakah garis $T(l), T(m)$ saling tegak lurus? Jelaskan!
2. Misalkan R merupakan titik tengah P dan Q . Apakah $T(R)$ merupakan titik tengah $T(P)$ dan $T(Q)$? Jelaskan!

Cobalah 58!. Misalkan T isometri dan $T(O) = O$.

1. Buktikan bahwa T merupakan transformasi linear, yaitu untuk setiap $X, Y \in \mathbb{R}^2$ dan konstanta α, β maka

$$T(\alpha X + \beta Y) = \alpha T(X) + \beta T(Y)$$

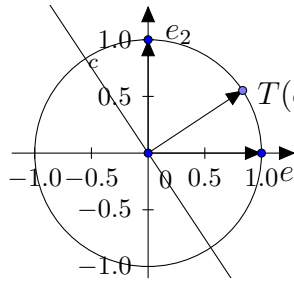
2. Matriks penyajian dari T dapat dituliskan sebagai

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Selidiki kondisi yang harus dipenuhi matriks ini karena T isometri.

Cobalah 59!. Misalkan $e_1 = (1, 0)$ dan $e_2 = (0, 1)$ dua vektor yang saling orthonormal, misalkan T merupakan isometri dengan $T(O) = O$.

1. Jelaskan mengapa $\{T(e_1), T(e_2)\}$ juga orthonormal.



Ada dua pilihan peta $T(e_2)$.

2. Karena $\{e_1, e_2\}$ merupakan basis, dan $X \in \mathbb{R}^2$ maka $X = x_1 e_1 + x_2 e_2$. Hitunglah x_1, x_2 dinyatakan dalam hasil kali dalam X dan e_1, e_2
3. Tuliskan $T(e_1) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$, hitung α, β dinyatakan dalam hasil kali dalam $T(e_1)$ dengan e_1, e_2 . Kemudian, buktikan bahwa $|\lambda_1| \leq 1$ dan $|\lambda_2| \leq 1$ serta $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$.
4. Karena $|\lambda_1| \leq 1$ dan $|\lambda_2| \leq 1$ serta $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$, maka kita dapat menuliskan $\lambda_1 = \cos \theta$ dan $\lambda_2 = \sin \theta$. Dengan menggunakan (1), tuliskan $T(e_2) = \alpha e_1 + \beta e_2$. Ada dua kemungkinan!
5. Jelaskan mengapa matriks penyajian transformasi T mempunyai bentuk

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ atau } \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

Apakah anda mengenali matriks transformasi yang pertama? Yang kedua?

2.4 Pengantar ke Group

Cobalah 60!. Misalkan G suatu himpunan. Operasi pada G adalah pemetaan $G \times G \rightarrow G$ yaitu untuk setiap $a, b \in G$ ada unsur di G , ditulis sebagai $a * b$, yaitu elemen yang dikaitkan dengan a dan b .

Cobalah 61!. Misalkan G himpunan semua translasi di $\mathbb{R}^2$, dan τ_1, τ_2 dua translasi. Kemudian $\tau_1 * \tau_2$ didefinisikan sebagai komposisi $\tau_1 \circ \tau_2$. Apakah ini merupakan operasi di G ?

Cobalah 62!. Misalkan G himpunan semua pencerminan terhadap garis di $\mathbb{R}^2$, dan σ_1, σ_2 dua pencerminan. Kemudian $\sigma_1 * \sigma_2$ didefinisikan sebagai komposisi $\sigma_1 \circ \sigma_2$. Apakah ini merupakan operasi di G ?

Perhatikan sifat yang diperlukan untuk menyelesaikan persamaan linear terhadap operasi penjumlahan bilangan di himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$, yaitu

$$a + x = b$$

Pertama, kita harus mencari lawan dari a terhadap operasi (penjumlahan), yaitu $-a$ yang mempunyai sifat

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Dengan menambahkan kedua ruas, maka diperoleh

$$(-a) + (a + x) = (-a) + b$$

Karena operasi bersifat asosiatif, maka

$$\begin{aligned} [(-a) + a] + x &= (-a) + b \\ 0 + x &= (-a) + b \\ x &= (-a) + b \end{aligned}$$

Cobalah 63!. Sifat apa saja yang diperlukan untuk menyelesaikan jawab persamaan linear terhadap operasi perkalian $ax = b$ dengan $a \neq 0$.

Definition 6 Misalkan G himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu operasi $*$ dengan sifat

1. *assosiatif*

Untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$

2. *Ada unsur identitas*

*Ada unsur e sehingga $a * e = e * a = a$ untuk setiap $a \in G$.*

3. *Setiap unsur mempunyai invers*

*Untuk setiap unsur $a \in G$ ada unsur $b \in G$ sehingga $a * b = b * a = e$*

Cobalah 64!.

1. Jika $G = \mathbb{Z}$, ujudlah apakah G merupakan group terhadap operasi penjumlahan.
2. Jika $G = \mathbb{Z}$, ujudlah apakah G merupakan group terhadap operasi perkalian.

Cobalah 65!. Dalam hal $\mathbb{Z}$, himpunan ini dapat diperluas dalam hal ini menjadi $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, himpunan bilangan rasional sehingga membentuk group terhadap operasi perkalian.

Cobalah 66!. Misalkan G himpunan semua translasi di $\mathbb{R}^2$. Ujudlah bahwa himpunan ini merupakan group terhadap operasi komposisi.

Cobalah 67!. Misalkan G himpunan semua rotasi di $\mathbb{R}^2$ dengan pusat di $(0, 0)$. Ujudlah bahwa himpunan ini merupakan group terhadap operasi komposisi.

Cobalah 68!. Misalkan G himpunan semua rotasi di $\mathbb{R}^2$. Apakah himpunan ini merupakan group terhadap operasi komposisi.

Cobalah 69!. Misalkan G himpunan semua pencerminan garis sejajar di $\mathbb{R}^2$ dan telah dilengkapi dengan operasi sehingga G membentuk group. Sebutkan anggota dari G .

Cobalah 70!. Misalkan diketahui persegi D ukuran 1×1 dengan pusat persegi ada di $(0, 0)$.

1. Carilah semua transformasi T sehingga $T(D) = D$, yaitu tidak mengubah bentuk persegi. Salah satu di antaranya adalah rotasi sebesar 90° dengan pusat rotasi adalah pusat persegi. Ada 8 transformasi.
2. Jika G adalah semua transformasi yang mengawetkan persegi tersebut, apakah mereka membentuk group? Ujudlah!

Cobalah 71!. Misalkan kita mempunyai semua pencerminan dari garis yang sejajar (misalkan sejajar sumbu y). Setiap pencerminan terhadap garis $x = a$ dikaitkan dengan matriks

$$\Omega_a = \begin{bmatrix} -1 & 2a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dan translasi sejauh λ dikaitkan dengan matriks

$$\tau_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sebagai ganti transformasi, operasi yang dilakukan pada matriks adalah perkalian matriks.

1. Ujilah $\tau_\lambda \tau_\mu = \tau_{\lambda+\mu}$ dan hitung juga $\tau_\mu \tau_\lambda$
2. Hitung $\Omega_a \Omega_b = \tau_\lambda$. Carilah λ dinyatakan dalam a dan b . Apakah ini sesuai dengan sifat pencerminan berturutan.
3. Hitung $\Omega_a \tau_\lambda$. Apakah ini sesuai dengan sifat pencerminan?
4. Hitung $\Omega_a \Omega_b \Omega_c$. Apakah ini sesuai dengan sifat pencerminan?