

Barisan Konvergen

Wono Setya Budhi

October 16, 2014

Barisan Konvergen

➊ Fungsi $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ disebut barisan, dan nilainya

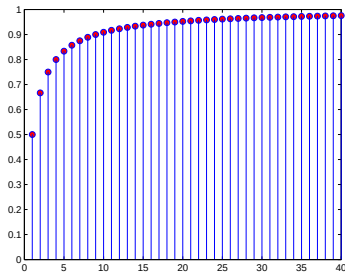
$$f(n) = x_n$$

Barisan Konvergen

❶ Fungsi $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ disebut barisan, dan nilainya

$$f(n) = x_n$$

❷ Contoh $x_n = \frac{n}{n+1}$, maka $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = \frac{3}{4}, \dots$



Barisan Konvergen

➊ Fungsi $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ disebut barisan, dan nilainya

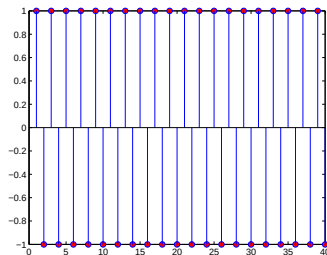
$$f(n) = x_n$$

Barisan Konvergen

- 1 Fungsi $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ disebut barisan, dan nilainya

$$f(n) = x_n$$

- 2 Contoh $x_n = (-1)^n$, maka $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1, \dots$



Barisan Konvergen

➊ Fungsi $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ disebut barisan, dan nilainya

$$f(n) = x_n$$

Barisan Konvergen

- 1 Fungsi $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ disebut barisan, dan nilainya

$$f(n) = x_n$$

- 2 Kita akan menyelidiki nilainya jika n dibuat besar.

Barisan Konvergen

- 1 Fungsi $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ disebut barisan, dan nilainya

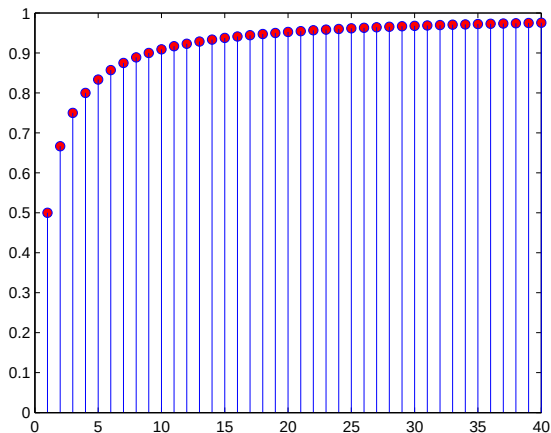
$$f(n) = x_n$$

- 2 Kita akan menyelidiki nilainya jika n dibuat besar.
- 3 Secara resmi $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ jika untuk setiap $\epsilon > 0$, ada bilangan asli N sehingga untuk $n > N$ berlaku

$$|x_n - L| < \epsilon$$

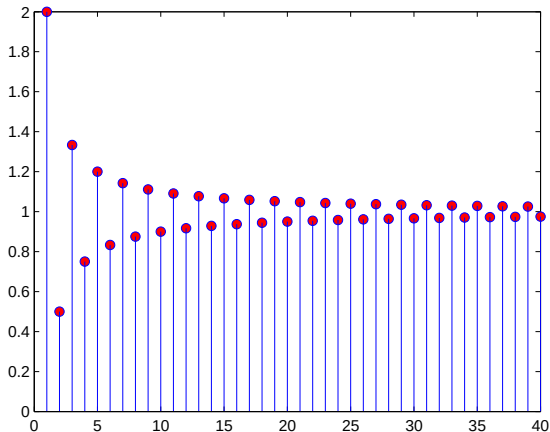
Barisan Konvergen

1 Contoh barisan konvergen



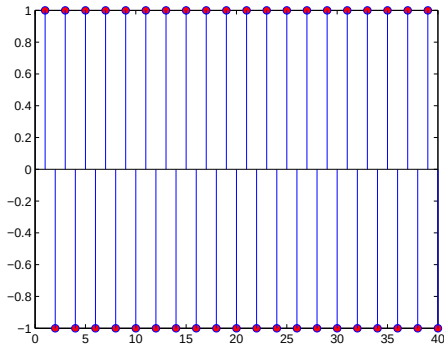
Barisan Konvergen

1 Contoh barisan konvergen



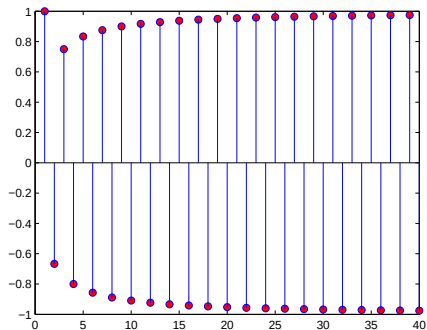
Barisan Konvergen

1 Contoh barisan yang tidak konvergen



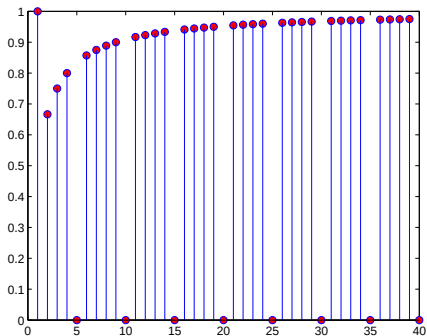
Barisan Konvergen

1 Contoh barisan yang tidak konvergen



Barisan Konvergen

1 Contoh barisan yang tidak konvergen



Barisan Konvergen

- ① Misalkan diketahui barisan

$$x_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

dengan tanda $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x .

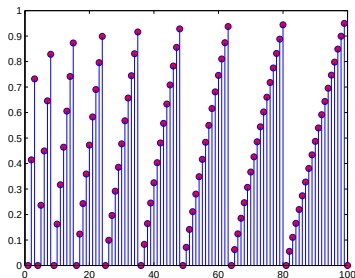
Barisan Konvergen

- 1 Misalkan diketahui barisan

$$x_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

dengan tanda $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x .

2



Barisan Konvergen

- 1 Misalkan diketahui barisan

$$x_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

dengan tanda $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x .

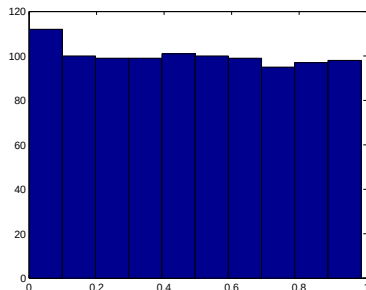
Barisan Konvergen

- 1 Misalkan diketahui barisan

$$x_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

dengan tanda $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x .

- 2 Histogram dari $\{x_n\}$ mulai dari $n = 1$ sampai dengan $N = 1000$;



Barisan Konvergen

- 1 Misalkan diketahui barisan

$$x_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

dengan tanda $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x .

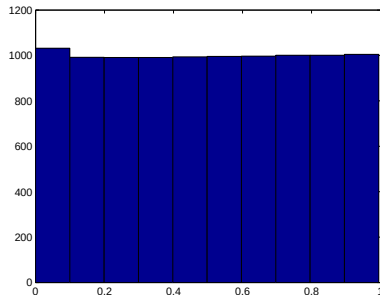
Barisan Konvergen

- 1 Misalkan diketahui barisan

$$x_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

dengan tanda $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x .

- 2 Histogram dari $\{x_n\}$



Barisan Konvergen

1 Misalkan diketahui barisan $x_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$

Barisan Konvergen

- 1 Misalkan diketahui barisan $x_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$
- 2 Berdasarkan hasil investigasi, kita melihat bahwa nilai $\{x_n\}$ terdistribusi "rata" di $[0, 1]$.

Barisan Konvergen

- 1 Misalkan diketahui barisan $x_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$
- 2 Berdasarkan hasil investigasi, kita melihat bahwa nilai $\{x_n\}$ terdistribusi "rata" di $[0, 1]$.
- 3 Jika $n = k^2$, maka $x_{k^2} = 0$

Barisan Konvergen

- 1 Misalkan diketahui barisan $x_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$
- 2 Berdasarkan hasil investigasi, kita melihat bahwa nilai $\{x_n\}$ terdistribusi "rata" di $[0, 1]$.
- 3 Jika $n = k^2$, maka $x_{k^2} = 0$
- 4 Apakah ada n sehingga $x_n = 1$?

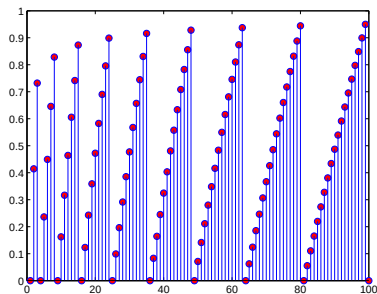
Barisan Konvergen

❶ Apakah ada n sehingga $x_n = 1$?

Barisan Konvergen

1 Apakah ada n sehingga $x_n = 1$?

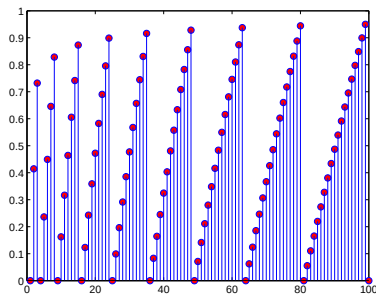
2



Barisan Konvergen

1 Apakah ada n sehingga $x_n = 1$?

2

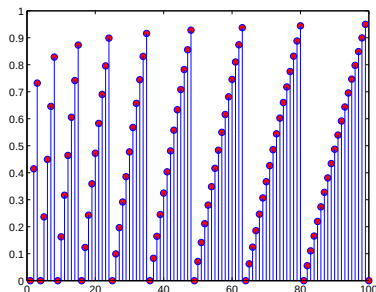


3 Jika ada n sehingga $\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor = 1$, maka ...

Barisan Konvergen

1 Apakah ada n sehingga $x_n = 1$?

2

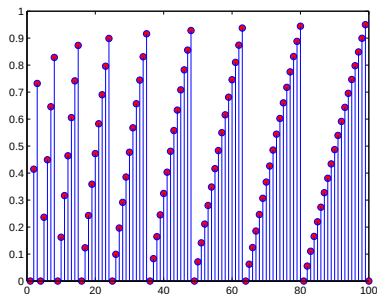


3 Jika ada n sehingga $\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor = 1$, maka ...

4 Tetapi, untuk $\epsilon > 0$ akan selalu ada N sehingga $x_N > 1 - \epsilon$.

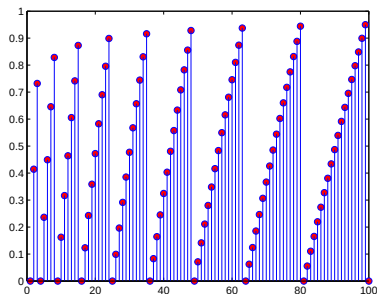
Barisan Konvergen

- ❶ Tetapi, untuk $\epsilon > 0$ akan selalu ada N sehingga $x_N > 1 - \epsilon$.



Barisan Konvergen

- 1 Tetapi, untuk $\epsilon > 0$ akan selalu ada N sehingga $x_N > 1 - \epsilon$.



- 2 Apa bentuk bilangan asli N sehingga $x_N > 1 - \epsilon$

Barisan Konvergen

1 Perhatikan nilai $x_{k^2+2k} = \sqrt{k^2+2k} - \left\lfloor \sqrt{k^2+2k} \right\rfloor$

Barisan Konvergen

1 Perhatikan nilai $x_{k^2+2k} = \sqrt{k^2+2k} - \left\lfloor \sqrt{k^2+2k} \right\rfloor$

2 Dalam hal ini

$$\begin{aligned} \sqrt{k^2+2k} - \left\lfloor \sqrt{k^2+2k} \right\rfloor &= \sqrt{k^2+2k} - k \\ &= \frac{2k}{\sqrt{k^2+2k} + k} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{k}} + 1} > 1 - \epsilon \end{aligned}$$

jika $\frac{\sqrt{1+\frac{2}{k}}+1}{2} < \frac{1}{1-\epsilon}$ atau

Barisan Konvergen

1 Perhatikan nilai $x_{k^2+2k} = \sqrt{k^2+2k} - \left\lfloor \sqrt{k^2+2k} \right\rfloor$

2 Dalam hal ini

$$\begin{aligned} \sqrt{k^2+2k} - \left\lfloor \sqrt{k^2+2k} \right\rfloor &= \sqrt{k^2+2k} - k \\ &= \frac{2k}{\sqrt{k^2+2k} + k} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{k}} + 1} > 1 - \epsilon \end{aligned}$$

jika $\frac{\sqrt{1+\frac{2}{k}}+1}{2} < \frac{1}{1-\epsilon}$ atau

$$\sqrt{1+\frac{2}{k}} < \frac{2}{1-\epsilon} - 1 = \frac{2 - (1-\epsilon)}{1-\epsilon} = \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}$$

Barisan Konvergen

1

$$\sqrt{1 + \frac{2}{k}} < \frac{2}{1 - \epsilon} - 1 = \frac{2 - (1 - \epsilon)}{1 - \epsilon} = \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}$$

Barisan Konvergen

1

$$\sqrt{1 + \frac{2}{k}} < \frac{2}{1 - \epsilon} - 1 = \frac{2 - (1 - \epsilon)}{1 - \epsilon} = \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}$$

2

$$1 + \frac{2}{k} < \left(\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} \right)^2 \text{ atau } \frac{2}{k} < \left(\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} \right)^2 - 1 = \frac{4\epsilon}{(1 - \epsilon)^2}$$

Barisan Konvergen

1

$$\sqrt{1 + \frac{2}{k}} < \frac{2}{1 - \epsilon} - 1 = \frac{2 - (1 - \epsilon)}{1 - \epsilon} = \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}$$

2

$$1 + \frac{2}{k} < \left(\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}\right)^2 \text{ atau } \frac{2}{k} < \left(\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}\right)^2 - 1 = \frac{4\epsilon}{(1 - \epsilon)^2}$$

3

atau

$$k > \frac{(1 - \epsilon)^2}{2\epsilon}$$

Barisan Konvergen

❶ Apakah ada n sehingga $\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor = \frac{1}{2}$?

Barisan Konvergen

- 1 Apakah ada n sehingga $\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor = \frac{1}{2}$?
- 2 Jika tidak ada, lakukan penyelidikan melalui komputer untuk mencari:

Barisan Konvergen

- 1 Apakah ada n sehingga $\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor = \frac{1}{2}$?
- 2 Jika tidak ada, lakukan penyelidikan melalui komputer untuk mencari:
- 3 Dengan menggunakan komputer, carilah semua nilai n sehingga

$$0,4 \leq x_n \leq 0,6$$

Barisan Konvergen

- 1 Apakah ada n sehingga $\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor = \frac{1}{2}$?
- 2 Jika tidak ada, lakukan penyelidikan melalui komputer untuk mencari:
- 3 Dengan menggunakan komputer, carilah semua nilai n sehingga

$$0,4 \leq x_n \leq 0,6$$

- 4 Dapatkan dibuktikan secara analitik?

Barisan Konvergen

- ➊ Apakah ada n sehingga $\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor = \frac{1}{2}$?
- ➋ Jika tidak ada, lakukan penyelidikan melalui komputer untuk mencari:
- ➌ Dengan menggunakan komputer, carilah semua nilai n sehingga

$$0,4 \leq x_n \leq 0,6$$

- ➍ Dapatkah dibuktikan secara analitik?
- ➎ Dengan menggunakan komputer, carilah semua nilai n sehingga

$$0,45 \leq x_n \leq 0,55$$

Barisan Konvergen

- ❶ Apakah ada n sehingga $\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ mempunyai nilai rasional, kecuali nol.

Barisan Konvergen

- 1 Misalkan diketahui barisan

$$x_n = \frac{2n^2}{7} - \left\lfloor \frac{2n^2}{7} \right\rfloor$$

dengan tanda $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x .

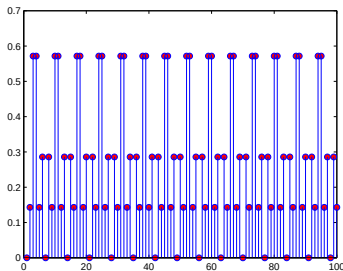
Barisan Konvergen

- 1 Misalkan diketahui barisan

$$x_n = \frac{2n^2}{7} - \left\lfloor \frac{2n^2}{7} \right\rfloor$$

dengan tanda $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x .

2



Barisan Konvergen

- 1 Misalkan diketahui barisan

$$x_n = \frac{2n^2}{7} - \left\lfloor \frac{2n^2}{7} \right\rfloor$$

dengan tanda $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x .

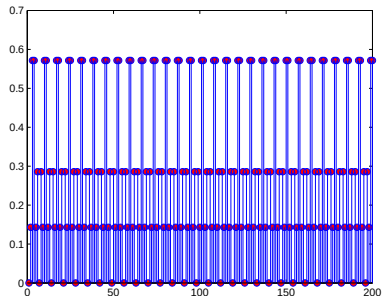
Barisan Konvergen

- 1 Misalkan diketahui barisan

$$x_n = \frac{2n^2}{7} - \left\lfloor \frac{2n^2}{7} \right\rfloor$$

dengan tanda $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x .

2



Barisan Konvergen

- 1 Misalkan diketahui barisan

$$x_n = \frac{2n^2}{7} - \left\lfloor \frac{2n^2}{7} \right\rfloor$$

dengan tanda $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x .

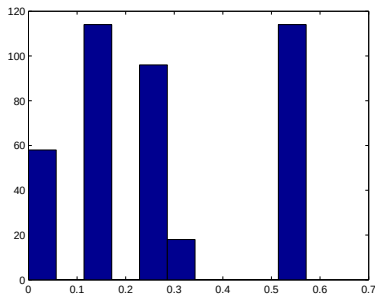
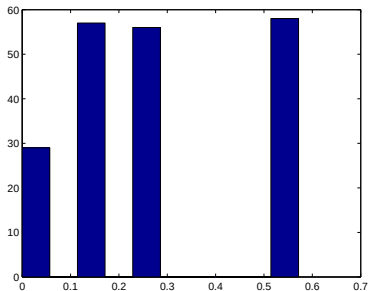
Barisan Konvergen

- 1 Misalkan diketahui barisan

$$x_n = \frac{2n^2}{7} - \left\lfloor \frac{2n^2}{7} \right\rfloor$$

dengan tanda $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x .

2



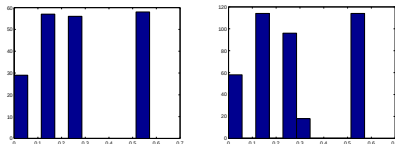
Barisan Konvergen

1 Misalkan diketahui barisan $x_n = \frac{2n^2}{7} - \left\lfloor \frac{2n^2}{7} \right\rfloor$

Barisan Konvergen

1 Misalkan diketahui barisan $x_n = \frac{2n^2}{7} - \left\lfloor \frac{2n^2}{7} \right\rfloor$

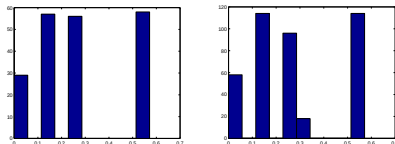
2



Barisan Konvergen

1 Misalkan diketahui barisan $x_n = \frac{2n^2}{7} - \left\lfloor \frac{2n^2}{7} \right\rfloor$

2

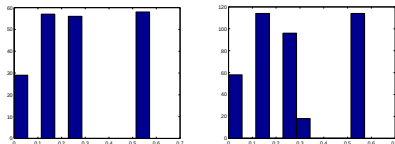


3 Dalam hal ini $\left\{ \frac{2n^2}{7} - \left\lfloor \frac{2n^2}{7} \right\rfloor : n \in \mathbb{N} \right\}$ terkumpul di empat titik, artinya ada sebagian dari $\{x_n\}$ yang konvergen ke salah satu dari empat titik tersebut.

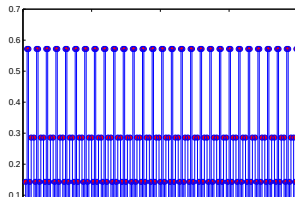
Barisan Konvergen

1 Misalkan diketahui barisan $x_n = \frac{2n^2}{7} - \left\lfloor \frac{2n^2}{7} \right\rfloor$

2



3 Dalam hal ini $\left\{ \frac{2n^2}{7} - \left\lfloor \frac{2n^2}{7} \right\rfloor : n \in \mathbb{N} \right\}$ terkumpul di empat titik, artinya ada sebagian dari $\{x_n\}$ yang konvergen ke salah satu dari empat titik tersebut.



Barisan Konvergen

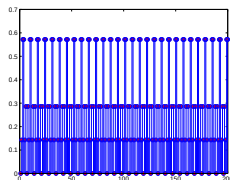
- 1 Misalkan diketahui barisan $x_n = \frac{2n^2}{7} - \left\lfloor \frac{2n^2}{7} \right\rfloor$.

Barisan Konvergen

- 1 Misalkan diketahui barisan $x_n = \frac{2n^2}{7} - \left\lfloor \frac{2n^2}{7} \right\rfloor$.
- 2 Dalam hal ini $\left\{ \frac{2n^2}{7} - \left\lfloor \frac{2n^2}{7} \right\rfloor : n \in \mathbb{N} \right\}$ terkumpul di empat titik, artinya ada sebagian dari $\{x_n\}$ yang konvergen ke salah satu dari empat titik tersebut. Sebagian dari $\{x_n\}$ dengan sifat $\{x_{g(n)}\}$ dengan $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ monoton naik, disebut sebagai subbarisan.

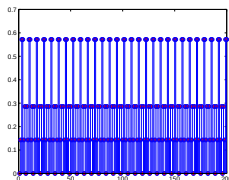
Barisan Konvergen

- 1 Misalkan diketahui barisan $x_n = \frac{2n^2}{7} - \left\lfloor \frac{2n^2}{7} \right\rfloor$.
- 2 Dalam hal ini $\left\{ \frac{2n^2}{7} - \left\lfloor \frac{2n^2}{7} \right\rfloor : n \in \mathbb{N} \right\}$ terkumpul di empat titik, artinya ada sebagian dari $\{x_n\}$ yang konvergen ke salah satu dari empat titik tersebut. Sebagian dari $\{x_n\}$ dengan sifat $\{x_{g(n)}\}$ dengan $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ monoton naik, disebut sebagai subbarisan.
- 3



Barisan Konvergen

- 1 Misalkan diketahui barisan $x_n = \frac{2n^2}{7} - \left\lfloor \frac{2n^2}{7} \right\rfloor$.
- 2 Dalam hal ini $\left\{ \frac{2n^2}{7} - \left\lfloor \frac{2n^2}{7} \right\rfloor : n \in \mathbb{N} \right\}$ terkumpul di empat titik, artinya ada sebagian dari $\{x_n\}$ yang konvergen ke salah satu dari empat titik tersebut. Sebagian dari $\{x_n\}$ dengan sifat $\{x_{g(n)}\}$ dengan $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ monoton naik, disebut sebagai subbarisan.
- 3



- 4 Bisa dicari ke empat titik tersebut tersebut?

Penyelidikan

1 Selidiki barisan

$$x_n = (2 + \sqrt{3})^n - \lfloor (2 + \sqrt{3})^n \rfloor$$

Penyelidikan

- 1 Selidiki barisan

$$x_n = (2 + \sqrt{3})^n - \lfloor (2 + \sqrt{3})^n \rfloor$$

- 2 Apakah barisan ini konvergen? Jika tidak, bagaimana dengan nilai $\{x_n\}$?

Penyelidikan

- 1 Selidiki barisan

$$x_n = (2 + \sqrt{3})^n - \lfloor (2 + \sqrt{3})^n \rfloor$$

- 2 Apakah barisan ini konvergen? Jika tidak, bagaimana dengan nilai $\{x_n\}$?
- 3 Apakah ada sub barisan yang konvergen ke suatu nilai? Jika ada, carilah!

Penyelidikan

1 Untuk $\alpha \in \mathbb{Q}$ selidiki sifat barisan

$$x_n = n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor$$

Penyelidikan

- 1 Untuk $\alpha \in \mathbb{Q}$ selidiki sifat barisan

$$x_n = n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor$$

- 2 Apakah barisan ini konvergen? Jika tidak, bagaimana dengan nilai $\{x_n\}$?

Penyelidikan

- 1 Untuk $\alpha \in \mathbb{Q}$ selidiki sifat barisan

$$x_n = n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor$$

- 2 Apakah barisan ini konvergen? Jika tidak, bagaimana dengan nilai $\{x_n\}$?
- 3 Apakah ada sub barisan yang konvergen ke suatu nilai?

Penyelidikan

- 1 Untuk $\alpha \in \mathbb{Q}$ selidiki sifat barisan

$$x_n = n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor$$

- 2 Apakah barisan ini konvergen? Jika tidak, bagaimana dengan nilai $\{x_n\}$?

- 3 Apakah ada sub barisan yang konvergen ke suatu nilai?

- 4 Untuk $\alpha \in \mathbb{Q}$ selidiki sifat barisan

$$x_n = n\alpha + c - \lfloor n\alpha + c \rfloor$$

dengan c merupakan bilangan real.

Penyelidikan

- 1 Untuk $\alpha \in \mathbb{Q}$ selidiki sifat barisan

$$x_n = n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor$$

- 2 Apakah barisan ini konvergen? Jika tidak, bagaimana dengan nilai $\{x_n\}$?

- 3 Apakah ada sub barisan yang konvergen ke suatu nilai?

- 4 Untuk $\alpha \in \mathbb{Q}$ selidiki sifat barisan

$$x_n = n\alpha + c - \lfloor n\alpha + c \rfloor$$

dengan c merupakan bilangan real.

- 5 Tentukan secara eksak!

Penyelidikan

- 1 Untuk $\alpha \notin \mathbb{Q}$ selidiki sifat barisan

$$x_n = n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor$$

Penyelidikan

- 1 Untuk $\alpha \notin \mathbb{Q}$ selidiki sifat barisan

$$x_n = n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor$$

- 2 Apakah barisan ini konvergen? Jika tidak, bagaimana dengan nilai $\{x_n\}$?

Penyelidikan

- 1 Untuk $\alpha \notin \mathbb{Q}$ selidiki sifat barisan

$$x_n = n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor$$

- 2 Apakah barisan ini konvergen? Jika tidak, bagaimana dengan nilai $\{x_n\}$?
- 3 Apakah ada sub barisan yang konvergen ke suatu nilai

Penyelidikan

- 1 Untuk $\alpha \in \mathbb{Q}$ selidiki sifat barisan

$$x_n = \sin \pi n \alpha$$

Penyelidikan

- 1 Untuk $\alpha \in \mathbb{Q}$ selidiki sifat barisan

$$x_n = \sin \pi n \alpha$$

- 2 Apakah barisan ini konvergen? Jika tidak, bagaimana dengan nilai $\{x_n\}$?

Penyelidikan

- 1 Untuk $\alpha \in \mathbb{Q}$ selidiki sifat barisan

$$x_n = \sin \pi n \alpha$$

- 2 Apakah barisan ini konvergen? Jika tidak, bagaimana dengan nilai $\{x_n\}$?
- 3 Apakah ada sub barisan yang konvergen ke suatu nilai?

Penyelidikan

- 1 Untuk $\alpha \notin \mathbb{Q}$ selidiki sifat barisan

$$x_n = \sin \pi n \alpha$$

Penyelidikan

- 1 Untuk $\alpha \notin \mathbb{Q}$ selidiki sifat barisan

$$x_n = \sin \pi n \alpha$$

- 2 Apakah barisan ini konvergen? Jika tidak, bagaimana dengan nilai $\{x_n\}$?

Penyelidikan

- 1 Untuk $\alpha \notin \mathbb{Q}$ selidiki sifat barisan

$$x_n = \sin \pi n \alpha$$

- 2 Apakah barisan ini konvergen? Jika tidak, bagaimana dengan nilai $\{x_n\}$?
- 3 Apakah ada sub barisan yang konvergen ke suatu nilai

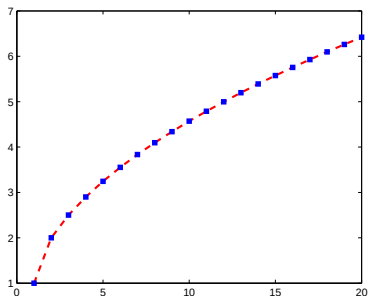
Barisan yang Lain

- ① Misalkan diketahui barisan $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ dengan $x_1 = 1$. Kita akan menyelidiki barisan yang terbentuk.

Barisan yang Lain

- 1 Misalkan diketahui barisan $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ dengan $x_1 = 1$. Kita akan menyelidiki barisan yang terbentuk.

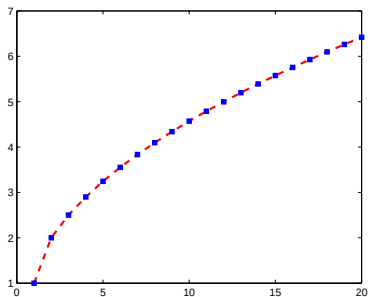
2



Barisan yang Lain

- 1 Misalkan diketahui barisan $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ dengan $x_1 = 1$. Kita akan menyelidiki barisan yang terbentuk.

2



- 3 Gambarkan berbagai grafik untuk barisan di atas untuk $n = 1, 2, 3, \dots, N$ dengan N cukup besar.

Barisan yang Lain

- 1 Misalkan diketahui barisan $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ dengan $x_1 = 1$. Kita akan menyelidiki barisan yang terbentuk.

Barisan yang Lain

- 1 Misalkan diketahui barisan $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ dengan $x_1 = 1$. Kita akan menyelidiki barisan yang terbentuk.
- 2 Gambarkan grafik untuk barisan di atas untuk $n = 1, 2, 3, \dots, N$ dengan N cukup besar dengan berbagai cara.

Barisan yang Lain

- 1 Misalkan diketahui barisan $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ dengan $x_1 = 1$. Kita akan menyelidiki barisan yang terbentuk.
- 2 Gambarkan grafik untuk barisan di atas untuk $n = 1, 2, 3, \dots, N$ dengan N cukup besar dengan berbagai cara.
- 3 Carilah suatu fungsi $y = f(x)$ yang mirip dengan grafik dari tersebut!

Barisan yang Lain

- 1 Misalkan diketahui barisan $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ dengan $x_1 = 1$. Kita akan menyelidiki barisan yang terbentuk.
- 2 Gambarkan grafik untuk barisan di atas untuk $n = 1, 2, 3, \dots, N$ dengan N cukup besar dengan berbagai cara.
- 3 Carilah suatu fungsi $y = f(x)$ yang mirip dengan grafik dari tersebut!
- 4 Terka order dari cara barisan tersebut membesar!

Barisan yang Lain

- 1 Misalkan diketahui barisan $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ dengan $x_1 = 1$. Kita akan menyelidiki barisan yang terbentuk.
- 2 Gambarkan grafik untuk barisan di atas untuk $n = 1, 2, 3, \dots, N$ dengan N cukup besar dengan berbagai cara.
- 3 Carilah suatu fungsi $y = f(x)$ yang mirip dengan grafik dari tersebut!
- 4 Terka order dari cara barisan tersebut membesar!
- 5 Dapatkah tebakan tersebut dibuktikan secara analitik!

Barisan yang Lain

- 1 Misalkan diketahui barisan $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ dengan $x_1 = 1$. Kita akan menyelidiki barisan yang terbentuk.
- 2 Gambarkan grafik untuk barisan di atas untuk $n = 1, 2, 3, \dots, N$ dengan N cukup besar dengan berbagai cara.
- 3 Carilah suatu fungsi $y = f(x)$ yang mirip dengan grafik dari tersebut!
- 4 Terka order dari cara barisan tersebut membesar!
- 5 Dapatkah tebakan tersebut dibuktikan secara analitik!
- 6 Apa yang terjadi jika barisan tersebut diganti dengan $x_{n+1} = ax_n + \frac{b}{x_n}$ dengan $x_1 = 1$.

Barisan Sinus

- 1 Kita akan menyelidiki barisan $x_n = \sin(n)$ dengan n merupakan bilangan asli.

Barisan Sinus

- 1 Kita akan menyelidiki barisan $x_n = \sin(n)$ dengan n merupakan bilangan asli.
- 2 Gambarkan grafik barisan tersebut untuk $n = 1, 2, \dots, N$ dengan N cukup besar, misalkan $N = 5000$.

Barisan Sinus

- 1 Kita akan menyelidiki barisan $x_n = \sin(n)$ dengan n merupakan bilangan asli.
- 2 Gambarkan grafik barisan tersebut untuk $n = 1, 2, \dots, N$ dengan N cukup besar, misalkan $N = 5000$.
- 3 Berdasarkan gambar tersebut, apakah dugaan anda tentang konvergensi barisan tersebut?

Barisan Sinus

- 1 Kita akan menyelidiki barisan $x_n = \sin(n)$ dengan n merupakan bilangan asli.
- 2 Gambarkan grafik barisan tersebut untuk $n = 1, 2, \dots, N$ dengan N cukup besar, misalkan $N = 5000$.
- 3 Berdasarkan gambar tersebut, apakah dugaan anda tentang konvergensi barisan tersebut?
- 4 Bagaimana dengan distribusi nilai x_n ?

Barisan Sinus

- 1 Kita akan menyelidiki barisan $x_n = \sin(n)$ dengan n merupakan bilangan asli.
- 2 Gambarkan grafik barisan tersebut untuk $n = 1, 2, \dots, N$ dengan N cukup besar, misalkan $N = 5000$.
- 3 Berdasarkan gambar tersebut, apakah dugaan anda tentang konvergensi barisan tersebut?
- 4 Bagaimana dengan distribusi nilai x_n ?
- 5 Maksudnya frekuensi dari nilai tersebut! Misalkan interval $[-1, 1]$ dibagi 10. Berapa banyak nilai yang berada di $[-1, -0.9]$, $[-0.9, -0.8]$ dan seterusnya.

Barisan Sinus

- 1 Kita akan menyelidiki barisan $x_n = \sin(n)$ dengan n merupakan bilangan asli.
- 2 Gambarkan grafik barisan tersebut untuk $n = 1, 2, \dots, N$ dengan N cukup besar, misalkan $N = 5000$.
- 3 Berdasarkan gambar tersebut, apakah dugaan anda tentang konvergensi barisan tersebut?
- 4 Bagaimana dengan distribusi nilai x_n ?
- 5 Maksudnya frekuensi dari nilai tersebut! Misalkan interval $[-1, 1]$ dibagi 10. Berapa banyak nilai yang berada di $[-1, -0.9]$, $[-0.9, -0.8]$ dan seterusnya.
- 6 Misalkan diberikan $[a, b] \subset [-1, 1]$, gambarkan sebanyak mungkin titik yang berada di dalam jangkauan interval tersebut! Apakah mungkin semuanya digambarkan?

Barisan Sinus

- 1 Kita akan menyelidiki barisan $x_n = \sin(n)$ dengan n merupakan bilangan asli.
- 2 Gambarkan grafik barisan tersebut untuk $n = 1, 2, \dots, N$ dengan N cukup besar, misalkan $N = 5000$.
- 3 Berdasarkan gambar tersebut, apakah dugaan anda tentang konvergensi barisan tersebut?
- 4 Bagaimana dengan distribusi nilai x_n ?
- 5 Maksudnya frekuensi dari nilai tersebut! Misalkan interval $[-1, 1]$ dibagi 10. Berapa banyak nilai yang berada di $[-1, -0.9]$, $[-0.9, -0.8]$ dan seterusnya.
- 6 Misalkan diberikan $[a, b] \subset [-1, 1]$, gambarkan sebanyak mungkin titik yang berada di dalam jangkauan interval tersebut! Apakah mungkin semuanya digambarkan?
- 7 Perbesar himpunan $[a, b]$ dan ambillah N yang berbeda serta amati perubahan titik yang terjadi di dalam interval tersebut.

Barisan Sinus

- ➊ Kita akan menyelidiki barisan $x_n = \sin(n)$ dengan n merupakan bilangan asli.
- ➋ Gambarkan grafik barisan tersebut untuk $n = 1, 2, \dots, N$ dengan N cukup besar, misalkan $N = 5000$.
- ➌ Berdasarkan gambar tersebut, apakah dugaan anda tentang konvergensi barisan tersebut?
- ➍ Bagaimana dengan distribusi nilai x_n ?
- ➎ Maksudnya frekuensi dari nilai tersebut! Misalkan interval $[-1, 1]$ dibagi 10. Berapa banyak nilai yang berada di $[-1, -0.9]$, $[-0.9, -0.8]$ dan seterusnya.
- ➏ Misalkan diberikan $[a, b] \subset [-1, 1]$, gambarkan sebanyak mungkin titik yang berada di dalam jangkauan interval tersebut! Apakah mungkin semuanya digambarkan?
- ➐ Perbesar himpunan $[a, b]$ dan ambillah N yang berbeda serta amati perubahan titik yang terjadi di dalam interval tersebut.
- ➑ Berdasarkan hasil observasi tersebut, dimanakah fokus penyusunan

Barisan Batu Hujan Es

1. Definisikan barisan bilangan bulat

$$x_{n+1} = \begin{cases} 3x_n + 1 & \text{jika } x_n \text{ merupakan bilangan ganjil} \\ \frac{x_n}{2} & \text{jika } x_n \text{ merupakan bilangan genap} \end{cases}$$

Barisan Batu Hujan Es

- 1 Definisikan barisan bilangan bulat

$$x_{n+1} = \begin{cases} 3x_n + 1 & \text{jika } x_n \text{ merupakan bilangan ganjil} \\ \frac{x_n}{2} & \text{jika } x_n \text{ merupakan bilangan genap} \end{cases}$$

- 2 Diberikan bilangan x_0 , hitung nilai x_n .

Barisan Batu Hujan Es

- 1 Definisikan barisan bilangan bulat

$$x_{n+1} = \begin{cases} 3x_n + 1 & \text{jika } x_n \text{ merupakan bilangan ganjil} \\ \frac{x_n}{2} & \text{jika } x_n \text{ merupakan bilangan genap} \end{cases}$$

- 2 Diberikan bilangan x_0 , hitung nilai x_n .
- 3 Gambarkan grafik barisan tersebut dengan berbagai cara.

Barisan Batu Hujan Es

- 1 Definisikan barisan bilangan bulat

$$x_{n+1} = \begin{cases} 3x_n + 1 & \text{jika } x_n \text{ merupakan bilangan ganjil} \\ \frac{x_n}{2} & \text{jika } x_n \text{ merupakan bilangan genap} \end{cases}$$

- 2 Diberikan bilangan x_0 , hitung nilai x_n .
- 3 Gambarkan grafik barisan tersebut dengan berbagai cara.
- 4 Lihatlah hasilnya untuk berbagai x_0 .

Barisan Batu Hujan Es

- 1 Definisikan barisan bilangan bulat

$$x_{n+1} = \begin{cases} 3x_n + 1 & \text{jika } x_n \text{ merupakan bilangan ganjil} \\ \frac{x_n}{2} & \text{jika } x_n \text{ merupakan bilangan genap} \end{cases}$$

- 2 Diberikan bilangan x_0 , hitung nilai x_n .
- 3 Gambarkan grafik barisan tersebut dengan berbagai cara.
- 4 Lihatlah hasilnya untuk berbagai x_0 .
- 5 Jika untuk x_0 tertentu, apakah barisan tersebut akan selalu mencapai barisan konvergen?

Barisan Batu Hujan Es

- 1 Definisikan barisan bilangan bulat

$$x_{n+1} = \begin{cases} 3x_n + 1 & \text{jika } x_n \text{ merupakan bilangan ganjil} \\ \frac{x_n}{2} & \text{jika } x_n \text{ merupakan bilangan genap} \end{cases}$$

- 2 Diberikan bilangan x_0 , hitung nilai x_n .
- 3 Gambarkan grafik barisan tersebut dengan berbagai cara.
- 4 Lihatlah hasilnya untuk berbagai x_0 .
- 5 Jika untuk x_0 tertentu, apakah barisan tersebut akan selalu mencapai barisan konvergen?
- 6 Apakah bisa dijelaskan hanya dengan menggunakan pensil dan kertas saja?

Barisan Batu Hujan Es

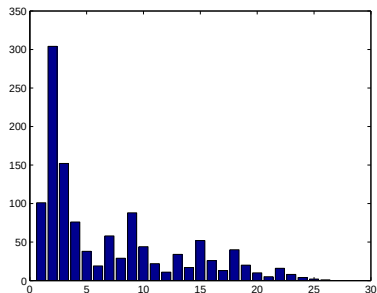
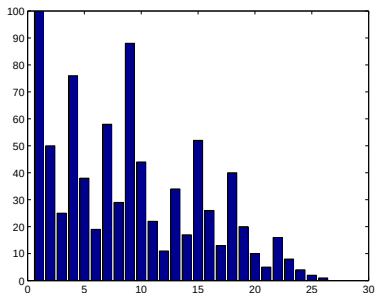
- 1 Definisikan barisan bilangan bulat

$$x_{n+1} = \begin{cases} 3x_n + 1 & \text{jika } x_n \text{ merupakan bilangan ganjil} \\ \frac{x_n}{2} & \text{jika } x_n \text{ merupakan bilangan genap} \end{cases}$$

- 2 Diberikan bilangan x_0 , hitung nilai x_n .
- 3 Gambarkan grafik barisan tersebut dengan berbagai cara.
- 4 Lihatlah hasilnya untuk berbagai x_0 .
- 5 Jika untuk x_0 tertentu, apakah barisan tersebut akan selalu mencapai barisan konvergen?
- 6 Apakah bisa dijelaskan hanya dengan menggunakan pensil dan kertas saja?
- 7 Misalkan, kita akan berhenti jika suku barisan mempunyai nilai 1. Sebagai contoh 8, 4, 2, 1. Dalam empat langkah. Selidiki banyak langkah untuk bilangan yang lain.

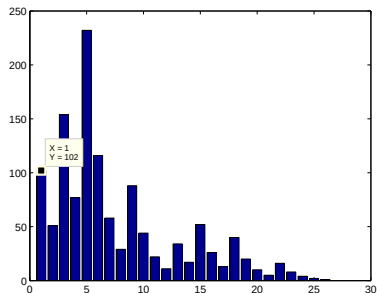
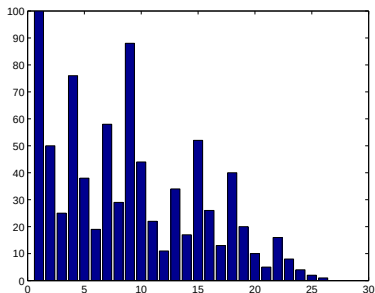
Barisan Batu Hujan Es

1 Antara $x_0 = 100$ dan $x_0 = 101$



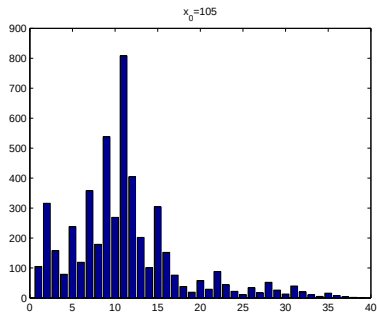
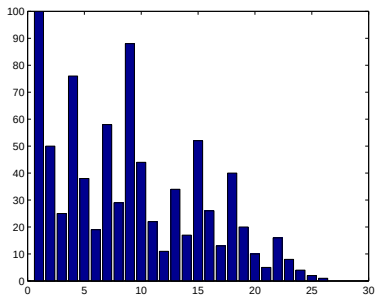
Barisan Batu Hujan Es

1 Antara $x_0 = 100$ dan $x_0 = 102$



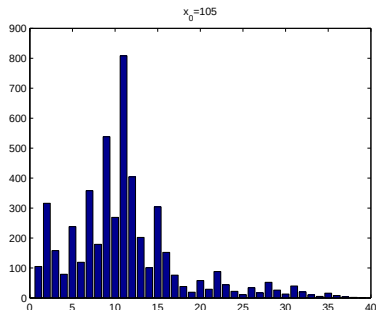
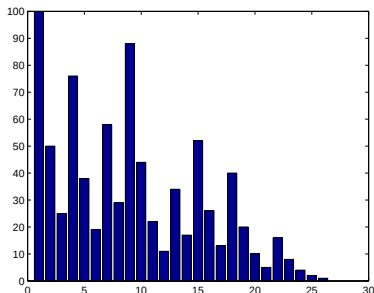
Barisan Batu Hujan Es

1 Antara $x_0 = 100$ dan $x_0 = 105$



Barisan Batu Hujan Es

- 1 Antara $x_0 = 100$ dan $x_0 = 105$



- 2 Klasifikasi: tentukan semua bilangan kurang dari 100 yang akan berakhir kurang dari 20, 30, 40, ... langkah.

Model Pertumbuhan

- 1 Misalkan x_n menyatakan jumlah penduduk pada tahun ke n .

Model Pertumbuhan

- 1 Misalkan x_n menyatakan jumlah penduduk pada tahun ke n .
- 2 Jika tidak ada masalah dengan pertumbuhan, maka penambahan $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ sebanding dengan jumlah penduduk saat itu.

Model Pertumbuhan

- 1 Misalkan x_n menyatakan jumlah penduduk pada tahun ke n .
- 2 Jika tidak ada masalah dengan pertumbuhan, maka penambahan $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ sebanding dengan jumlah penduduk saat itu.
- 3 Jadi

$$\Delta x_n \sim x_n$$

Model Pertumbuhan

- 1 Misalkan x_n menyatakan jumlah penduduk pada tahun ke n .
- 2 Jika tidak ada masalah dengan pertumbuhan, maka penambahan $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ sebanding dengan jumlah penduduk saat itu.
- 3 Jadi

$$\Delta x_n \sim x_n$$

- 4 Model yang paling sederhana adalah

$$\Delta x_n = r x_n$$

atau

$$x_{n+1} - x_n = r x_n \text{ atau } x_{n+1} = (1 + r) x_n$$

Model Pertumbuhan

- 1 Misalkan x_n menyatakan jumlah penduduk pada tahun ke n .
- 2 Jika tidak ada masalah dengan pertumbuhan, maka penambahan $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ sebanding dengan jumlah penduduk saat itu.
- 3 Jadi

$$\Delta x_n \sim x_n$$

- 4 Model yang paling sederhana adalah

$$\Delta x_n = r x_n$$

atau

$$x_{n+1} - x_n = r x_n \text{ atau } x_{n+1} = (1 + r) x_n$$

- 5 Dalam hal ini pertumbuhan mengikuti barisan geometri.

Model Pertumbuhan

- 1 Model yang paling sederhana adalah

$$\Delta x_n = rx_n$$

Model Pertumbuhan

- 1 Model yang paling sederhana adalah

$$\Delta x_n = rx_n$$

- 2 Tetapi kenyataannya, tentu ada yang mati.

Model Pertumbuhan

- 1 Model yang paling sederhana adalah

$$\Delta x_n = rx_n$$

- 2 Tetapi kenyataannya, tentu ada yang mati.

- 3 Model yang lebih wajar adalah

$$\Delta x_n = rx_n (M - x_n)$$

dengan M menyatakan kapasitas. Atau

$$x_{n+1} = \mu x_n (K - x_n)$$

Model Pertumbuhan

- ❶ Model yang paling sederhana adalah

$$\Delta x_n = rx_n$$

- ❷ Tetapi kenyataannya, tentu ada yang mati.

- ❸ Model yang lebih wajar adalah

$$\Delta x_n = rx_n (M - x_n)$$

dengan M menyatakan kapasitas. Atau

$$x_{n+1} = \mu x_n (K - x_n)$$

- ❹ Saat ini kita hanya akan menyelidiki sifat barisan $x_1, x_2, \dots$

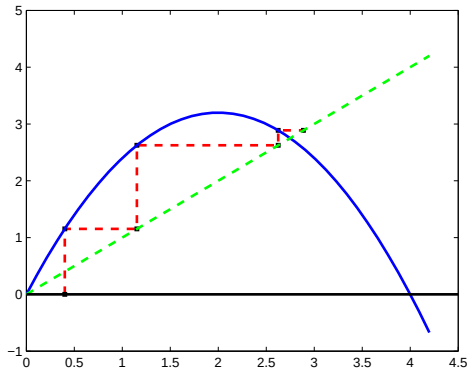
Model Pertumbuhan

- 1 Misalkan kita mempunyai barisan $x_{n+1} = \mu x_n (4 - x_n)$ dengan $x_1 = 0.4$ dengan $\mu = 0.8$

Model Pertumbuhan

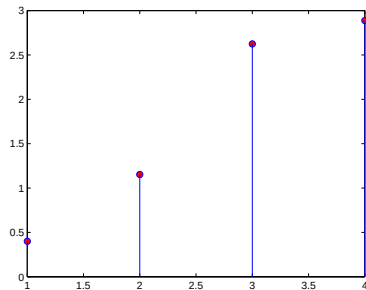
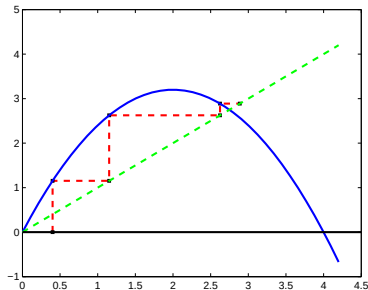
- 1 Misalkan kita mempunyai barisan $x_{n+1} = \mu x_n (4 - x_n)$ dengan $x_1 = 0.4$ dengan $\mu = 0.8$

- 2



Barisan Konvergen

Misalkan kita mempunyai barisan $x_{n+1} = \mu x_n (4 - x_n)$ dengan $x_1 = 0.4$



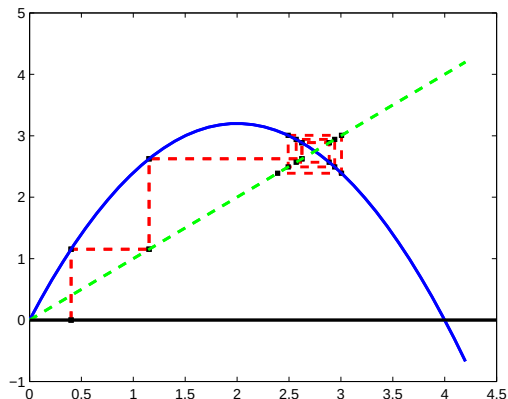
Barisan Konvergen

- 1 Misalkan kita mempunyai barisan $x_{n+1} = \mu x_n (4 - x_n)$ dengan $x_1 = 0.4$

Barisan Konvergen

- 1 Misalkan kita mempunyai barisan $x_{n+1} = \mu x_n (4 - x_n)$ dengan $x_1 = 0.4$

- 2



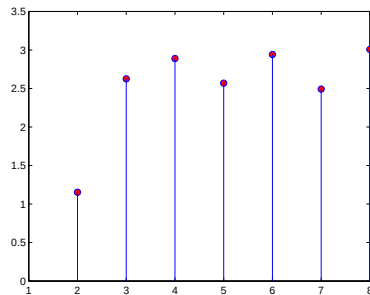
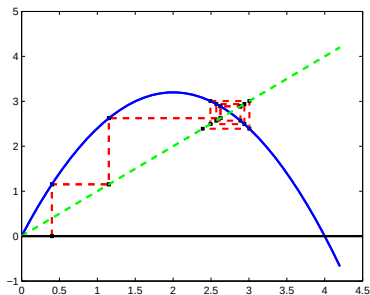
Barisan Konvergen

- 1 Misalkan kita mempunyai barisan $x_{n+1} = \mu x_n (4 - x_n)$ dengan $x_1 = 0.4$

Barisan Konvergen

- 1 Misalkan kita mempunyai barisan $x_{n+1} = \mu x_n (4 - x_n)$ dengan $x_1 = 0.4$

2



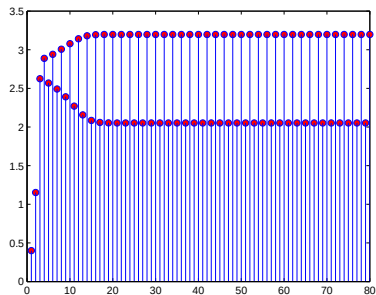
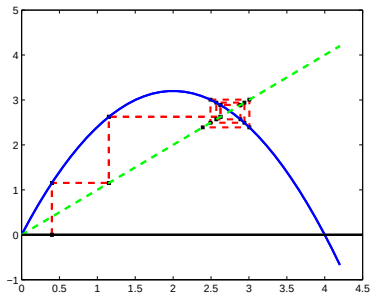
Barisan Konvergen

- 1 Misalkan kita mempunyai barisan $x_{n+1} = \mu x_n (4 - x_n)$ dengan $x_1 = 0.4$

Barisan Konvergen

- 1 Misalkan kita mempunyai barisan $x_{n+1} = \mu x_n (4 - x_n)$ dengan $x_1 = 0.4$

2

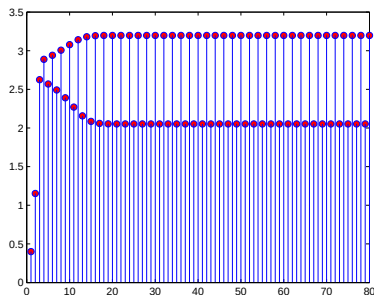


Barisan Konvergen

- 1 Misalkan kita mempunyai barisan $x_{n+1} = \mu x_n (4 - x_n)$ dengan $x_1 = 0.4$.

Barisan Konvergen

- 1 Misalkan kita mempunyai barisan $x_{n+1} = \mu x_n (4 - x_n)$ dengan $x_1 = 0.4$.
- 2 Jika kita hanya memperhatikan barisan $x_1, x_3, x_5, \dots$ maka akan diperoleh barisan

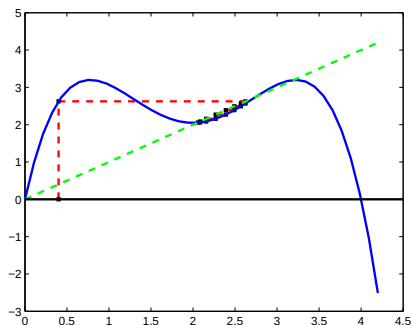


Barisan Konvergen

- 1 Misalkan kita mempunyai barisan $x_{n+1} = \mu x_n (4 - x_n)$ dengan $x_1 = 0.4$.

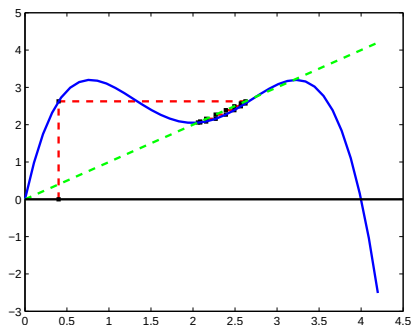
Barisan Konvergen

- 1 Misalkan kita mempunyai barisan $x_{n+1} = \mu x_n (4 - x_n)$ dengan $x_1 = 0.4$.
- 2 Jika kita hanya memperhatikan barisan $x_1, x_3, x_5, \dots$ maka akan diperoleh barisan



Barisan Konvergen

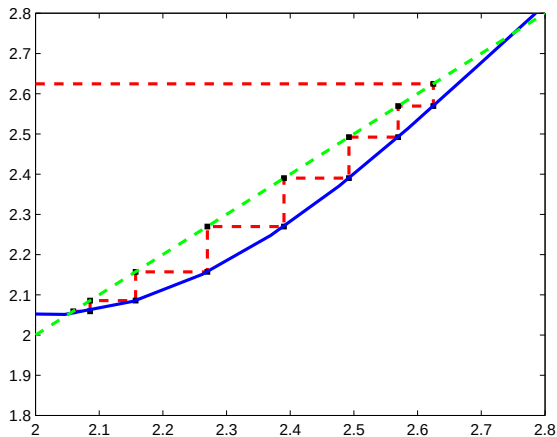
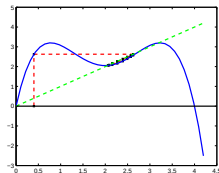
- 1 Misalkan kita mempunyai barisan $x_{n+1} = \mu x_n (4 - x_n)$ dengan $x_1 = 0.4$.
- 2 Jika kita hanya memperhatikan barisan $x_1, x_3, x_5, \dots$ maka akan diperoleh barisan



- 3 Perhatikan bahwa $x_3 = f(f(x_1))$, $x_5 = f(f(x_3))$

Barisan Konvergen

- 1 Kita dapat memfokus di sekitar daerah yang menarik



Barisan Konvergen

- ❶ Misalkan kita mempunyai barisan $x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$ dengan $x_1 = a$.

Barisan Konvergen

- 1 Misalkan kita mempunyai barisan $x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$ dengan $x_1 = a$.
- 2 Selidiki nilai a agar menghasilkan suatu barisan yang konvergen.
Apakah ini mungkin?

Barisan Konvergen

- 1 Misalkan kita mempunyai barisan $x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$ dengan $x_1 = a$.
- 2 Selidiki nilai a agar menghasilkan suatu barisan yang konvergen. Apakah ini mungkin?
- 3 Selidiki nilai a agar menghasilkan suatu barisan dengan sifat pada contoh. Apakah bisa dengan cara lain memperoleh hal ini?

Barisan Konvergen

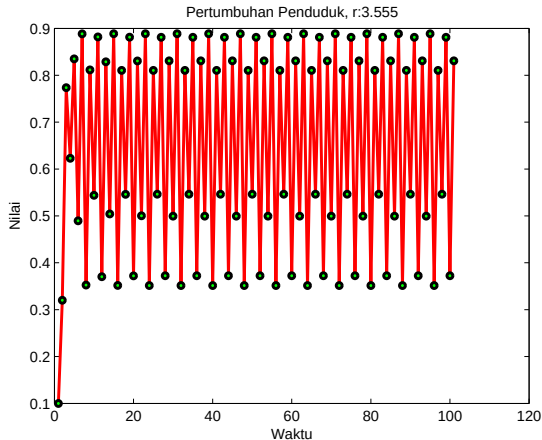
- 1 Misalkan kita mempunyai barisan $x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$ dengan $x_1 = a$.
- 2 Selidiki nilai a agar menghasilkan suatu barisan yang konvergen. Apakah ini mungkin?
- 3 Selidiki nilai a agar menghasilkan suatu barisan dengan sifat pada contoh. Apakah bisa dengan cara lain memperoleh hal ini?
- 4 Selidiki nilai a agar menghasilkan barisan dengan sifat lain.

Barisan Konvergen

- 1 Misalkan kita mempunyai barisan $x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$ dengan $x_1 = a$.
- 2 Selidiki nilai a agar menghasilkan suatu barisan yang konvergen. Apakah ini mungkin?
- 3 Selidiki nilai a agar menghasilkan suatu barisan dengan sifat pada contoh. Apakah bisa dengan cara lain memperoleh hal ini?
- 4 Selidiki nilai a agar menghasilkan barisan dengan sifat lain.
- 5 Bagaimana dengan perubahan nilai μ ?

Kemungkinan Jenis Barisan yang Muncul

1



Kemungkinan Jenis Barisan yang Muncul

1

