

Deret Harmonik

Wono Setya Budhi

October 16, 2014

Deret Harmonik

- ➊ Misalkan kita mempunyai barisan $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan $f_n = \frac{1}{n}$

Deret Harmonik

- 1 Misalkan kita mempunyai barisan $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan $f_n = \frac{1}{n}$
- 2 Selanjutnya, buat barisan baru

$$H(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

dengan $n = 1, 2, 3, \dots$. Barisan ini disebut deret (barisan yang dibuat dengan cara khusus).

Deret Harmonik

- 1 Misalkan kita mempunyai barisan $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan $f_n = \frac{1}{n}$
- 2 Selanjutnya, buat barisan baru

$$H(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

dengan $n = 1, 2, 3, \dots$. Barisan ini disebut deret (barisan yang dibuat dengan cara khusus).

- 3 Nilai barisan ini akan membesar. Salah satu melihat ini

$$\begin{aligned}
 &1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots \\
 &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots
 \end{aligned}$$

Deret Harmonik

- ➊ Misalkan kita mempunyai barisan $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan $f_n = \frac{1}{n}$
- ➋ Selanjutnya, buat barisan baru

$$H(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

dengan $n = 1, 2, 3, \dots$. Barisan ini disebut deret (barisan yang dibuat dengan cara khusus).

- ➌ Nilai barisan ini akan membesar. Salah satu melihat ini

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots \\ \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \end{aligned}$$

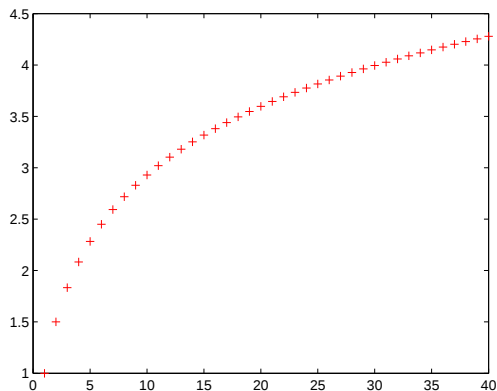
- ➍ Saat ini kita akan melihat order dari cara deret ini membesar dengan membandingkan fungsi $f(x)$ dengan

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ dan } \lim_{n \rightarrow \infty} [H(n) - f(n)] = c$$

Deret Harmonik

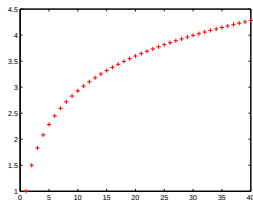
```
% Kita akan melihat ukuran membesarnya  
N=40  
H(1)=1  
for i=2:N  
    H(i)=H(i-1)+1/i;  
end  
plot(H,'+r')
```

Deret Harmonik



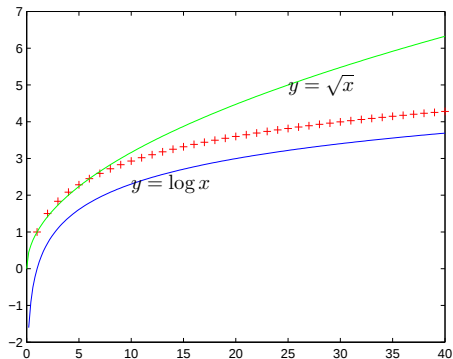
1 Pernah melihat fungsi seperti ini?

Deret Harmonik



- 1 Fungsi dengan bentuk seperti di atas $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \ln x$ atau $f(x) = x^r$ dengan $0 < r < 1$.

Deret Harmonik



Deret Harmonik

- 1 Berdasarkan grafik tersebut, kita melihat bahwa ada perbedaan yang "konstan" terhadap $y = \ln(x)$.

Deret Harmonik

- 1 Berdasarkan grafik tersebut, kita melihat bahwa ada perbedaan yang "konstan" terhadap $y = \ln(x)$.
- 2 Apakah ini benar?

Deret Harmonik

- 1 Berdasarkan grafik tersebut, kita melihat bahwa ada perbedaan yang "konstan" terhadap $y = \ln(x)$.
- 2 Apakah ini benar?
- 3 Kita akan menguji dengan melihat barisan

$$C(n) = H(n) - \ln n$$

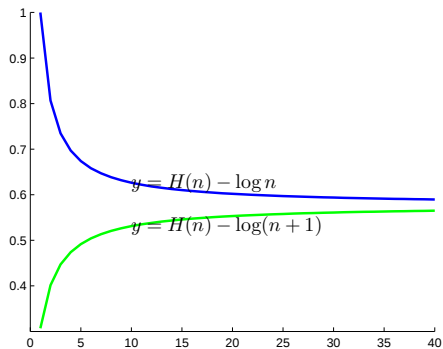
$$c(n) = H(n) - \ln(n+1)$$

dengan n sangat besar

Deret Harmonik

```
x=linspace(1,40,40);
plot(x,H(x)-log(x),'b','LineWidth',2)
text('Interpreter','latex',...
     'String','$y=H(n)-\log n$',...
     'Position',[10 H(10)-log(10)],...
     'FontSize',16)
plot(x,H(x)-log(x+1),'g','LineWidth',2)
text('Interpreter','latex',...
     'String','$y=H(n)-\log (n+1)$',...
     'Position',[10 H(10)-log(10+1)],...
     'FontSize',16)
```

Deret Harmonik



Deret Harmonik

- ❶ Karena $C(n) = H(n) - \log(n)$ monoton turun dan $c(n) = H(n) - \log(n+1)$ monoton naik, dan

$$C(n) \neq c(n)$$

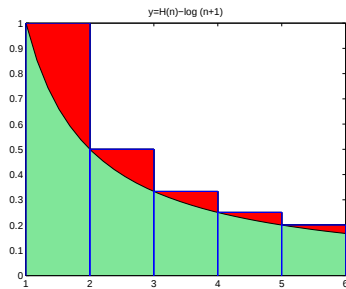
untuk setiap n , dugaan kita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H(n) - \log(n)$$

ada

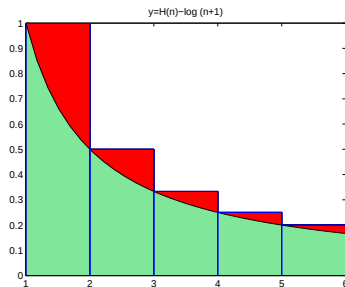
Deret Harmonik

1



Deret Harmonik

1

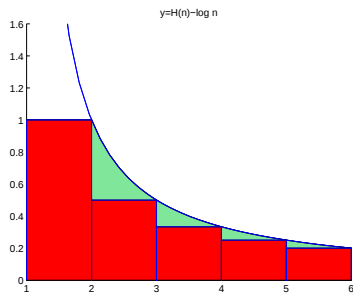


2

$$\begin{aligned}
 c(5) &= H(5) - \ln(5+1) \\
 &= H(5) - \int_1^{5+1} \frac{1}{x} dx
 \end{aligned}$$

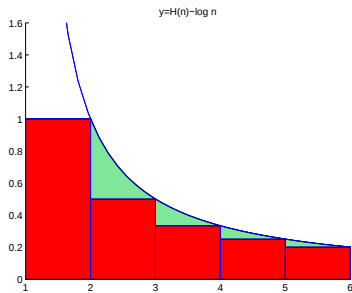
Deret Harmonik

1



Deret Harmonik

1



2

$$\begin{aligned}
 c(5) &= H(5) - \ln(5) \\
 &= H(5) - \int_2^6 \frac{1}{x-1} dx
 \end{aligned}$$

Deret Harmonik

1 Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}C(n) - c(n) &= H(n) - \ln(n) - H(n) + \ln(n+1) \\&= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Deret Harmonik

- 1 Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} C(n) - c(n) &= H(n) - \ln(n) - H(n) + \ln(n+1) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

- 2 Jika $n \rightarrow \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$, maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{C(n) - c(n)\} = 0 \text{ atau } \lim_{n \rightarrow \infty} C(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c(n) = C$$

yang sudah diketemukan oleh Euler (1707-1783)

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \ln n$$

Deret Harmonik

❶ Apakah kita dapat mengenali sisa

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

Deret Harmonik

❶ Bandingkan $H(n)$ dengan $\sqrt{n}$, $\sqrt[3]{n}$, $\sqrt[4]{n}$, ...

Deret Harmonik

- 1 Bandingkan $H(n)$ dengan $\sqrt{n}$, $\sqrt[3]{n}$, $\sqrt[4]{n}$, $\dots$
- 2 Selidiki apa yang terjadi dengan $H(2n) - H(n)$ jika $n \rightarrow \infty$. Apakah anda mengenalinya?

Deret Harmonik

- 1 Bandingkan $H(n)$ dengan $\sqrt{n}$, $\sqrt[3]{n}$, $\sqrt[4]{n}$, $\dots$
- 2 Selidiki apa yang terjadi dengan $H(2n) - H(n)$ jika $n \rightarrow \infty$. Apakah anda mengenalinya?
- 3 Selidiki juga dengan $H(2^k n) - H(n)$

Deret Harmonik

- 1 Bandingkan $H(n)$ dengan $\sqrt{n}$, $\sqrt[3]{n}$, $\sqrt[4]{n}$, ...
- 2 Selidiki apa yang terjadi dengan $H(2n) - H(n)$ jika $n \rightarrow \infty$. Apakah anda mengenalinya?
- 3 Selidiki juga dengan $H(2^k n) - H(n)$
- 4 Misalkan n mempunyai nilai tetap, selidiki apa yang terjadi dengan $H(2^k n)$. Tentu nilainya juga akan membesar. Bagaimana ukuran membesarnya? Carilah suatu fungsi yang dapat digunakan sebagai ukuran.

Deret Harmonik

Misalkan $J(n)$ merupakan bilangan bulat yang tidak lebih kecil dari H_n

- 1 Hitung $J(2n) - J(n)$ dengan $n = 1, 2, \dots, N$ dengan N cukup besar.
Kesimpulan yang bisa diperoleh?

Deret Harmonik

Misalkan $J(n)$ merupakan bilangan bulat yang tidak lebih kecil dari H_n

- 1 Hitung $J(2n) - J(n)$ dengan $n = 1, 2, \dots, N$ dengan N cukup besar. Kesimpulan yang bisa diperoleh?
- 2 Tentukan kemungkinan nilai $\frac{m}{n}$ jika $J(m) = J(n) + 1$

Deret Harmonik

Misalkan $J(n)$ merupakan bilangan bulat yang tidak lebih kecil dari H_n

- ① Hitung $J(2n) - J(n)$ dengan $n = 1, 2, \dots, N$ dengan N cukup besar. Kesimpulan yang bisa diperoleh?
- ② Tentukan kemungkinan nilai $\frac{m}{n}$ jika $J(m) = J(n) + 1$
- ③ Misalkan n bilangan terbesar sehingga $J(n) = m$, untuk $m = 1, 2, \dots, 30$. Tuliskan ini sebagai $L(m)$. Hitung $\frac{L(m+1)}{L(m)}$. Carilah suatu kesimpulan mengenai hasil ini?

Deret Harmonik

Misalkan $J(n)$ merupakan bilangan bulat yang tidak lebih kecil dari H_n

- ① Hitung $J(2n) - J(n)$ dengan $n = 1, 2, \dots, N$ dengan N cukup besar. Kesimpulan yang bisa diperoleh?
- ② Tentukan kemungkinan nilai $\frac{m}{n}$ jika $J(m) = J(n) + 1$
- ③ Misalkan n bilangan terbesar sehingga $J(n) = m$, untuk $m = 1, 2, \dots, 30$. Tuliskan ini sebagai $L(m)$. Hitung $\frac{L(m+1)}{L(m)}$. Carilah suatu kesimpulan mengenai hasil ini?
- ④ Tentukan order dari $L(m)$ jika m membesar tanpa batas. Sekali lagi, tentukan order membesarnya $H(n)$.

Deret Harmonik

- 1 Bagaimana dengan deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

Apakah konvergen? Apakah anda mengenalinya?

Deret Harmonik

- 1 Bagaimana dengan deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

Apakah konvergen? Apakah anda mengenalinya?

- 2 Bagaimana dengan deret

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Apakah deret konvergen? Apakah anda mengenalinya?

Deret Harmonik

- 1 Bagaimana dengan deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

Apakah konvergen? Apakah anda mengenalinya?

- 2 Bagaimana dengan deret

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Apakah deret konvergen? Apakah anda mengenalinya?

- 3 Bagaimana dengan deret

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

Apakah deret konvergen? Apakah anda mengenalinya?

Deret Harmonik

- ① Kita mengetahui bahwa deret

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

divergen. Selidiki order divergensinya.

Deret Harmonik

- 1 Kita mengetahui bahwa deret

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

divergen. Selidiki order divergensinya.

- 2 Carilah $a_n = f(n)$ sehingga $y_n = x_n - a_n$ konvergen!

Deret Harmonik

- 1 Kita mengetahui bahwa deret

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

divergen. Selidiki order divergensinya.

- 2 Carilah $a_n = f(n)$ sehingga $y_n = x_n - a_n$ konvergen!
- 3 Kalau perlu carilah a_n lebih dari satu.

Deret Harmonik

- 1 Kita mengetahui bahwa deret

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

divergen. Selidiki order divergensinya.

- 2 Carilah $a_n = f(n)$ sehingga $y_n = x_n - a_n$ konvergen!
- 3 Kalau perlu carilah a_n lebih dari satu.
- 4 Ingat saat $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$, kita memperoleh $f(x) = \ln x$.

Deret Harmonik

- 1 Kita mengetahui bahwa deret

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

divergen. Selidiki order konvergensinya.

Deret Harmonik

- ❶ Kita mengetahui bahwa deret

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

divergen. Selidiki order konvergensi.

- ❷ Carilah $a_n = f(n)$ sehingga $y_n = x_n - a_n$ konvergen!

Deret Harmonik

- 1 Kita mengetahui bahwa deret

$$x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

divergen. Selidiki order konvergensinya.

- 2 Carilah $a_n = f(n)$ sehingga $y_n = x_n - a_n$ konvergen!
- 3 Kalau perlu carilah a_n lebih dari satu.

Deret Harmonik

- 1 Selidiki ke konvergenan

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

Deret Harmonik

- 1 Selidiki ke konvergenan

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

- 2 Selidiki ke konvergenan

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

Deret Harmonik

- 1 Selidiki ke konvergenan

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

- 2 Selidiki ke konvergenan

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

- 3 Selidiki ke konvergenan

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots$$