



Permukaan

Turunan Covariant

Wono Setya Budhi

Februari, 2014

KK Analisis Geometri, FMIPA-ITB



Turunan Kovarian

- 1 Sekarang kita akan mempelajari tentang geometri permukaan yang bisa dilihat oleh "orang" yang berada di permukaan tersebut.



Turunan Kovarian

- 1 Sekarang kita akan mempelajari tentang geometri permukaan yang bisa dilihat oleh "orang" yang berada di permukaan tersebut.
- 2 Di antaranya, garis sejajar menurut orang di permukaan.



Turunan Kovarian

- 1 Sekarang kita akan mempelajari tentang geometri permukaan yang bisa dilihat oleh "orang" yang berada di permukaan tersebut.
- 2 Di antaranya, garis sejajar menurut orang di permukaan.
- 3 Benda bergerak dengan kecepatan konstan menurut orang yang berada di permukaan.



Turunan Kovarian di Ruang Euclid

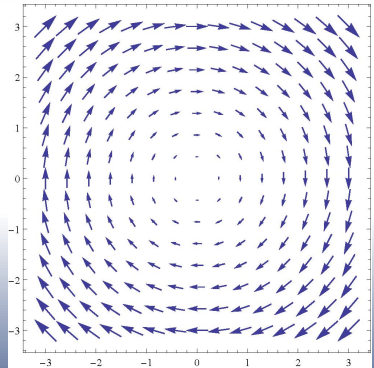
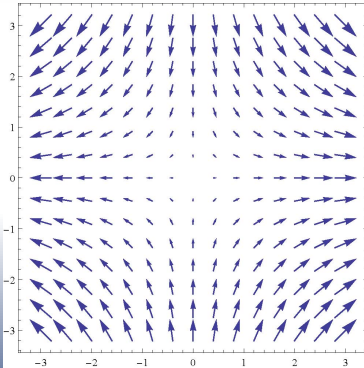
- 1 Misalkan $M \subset \mathbb{R}^2$ subhimpunan buka di $\mathbb{R}^2$ dan $X : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ suatu medan vektor artinya $X(p) \in T_p(M)$ untuk setiap $p \in M$.



Turunan Kovarian di Ruang Euclid

- 1 Misalkan $M \subset \mathbb{R}^2$ subhimpunan buka di $\mathbb{R}^2$ dan $X : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ suatu medan vektor artinya $X(p) \in T_p(M)$ untuk setiap $p \in M$.

2





Turunan Kovarian di Ruang Euclid

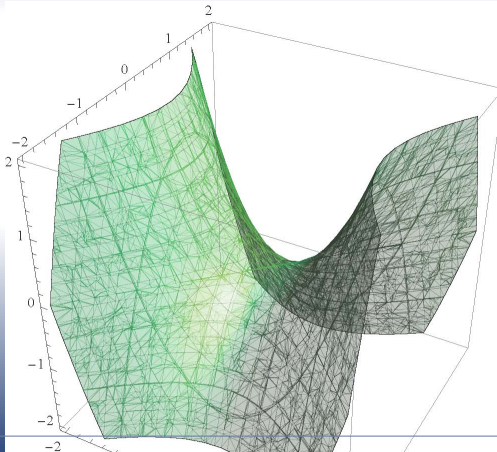
- 1 Misalkan $M \subset \mathbb{R}^3$ permukaan di $\mathbb{R}^3$ dan $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ suatu medan vektor artinya $X(p) \in T_p(M)$ untuk setiap $p \in M$



Turunan Kovarian di Ruang Euclid

1 Misalkan $M \subset \mathbb{R}^3$ permukaan di $\mathbb{R}^3$ dan $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ suatu medan vektor artinya $X(p) \in T_p(M)$ untuk setiap $p \in M$

2

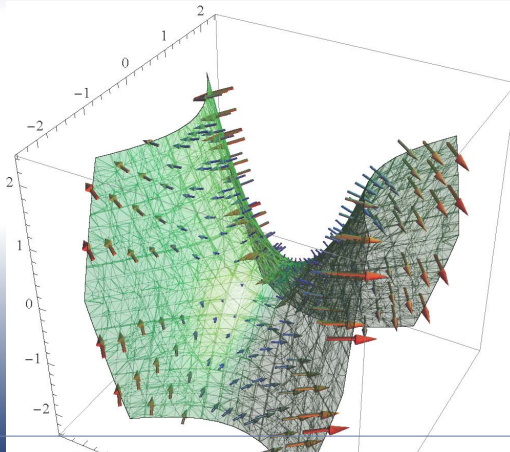




Turunan Kovarian di Ruang Euclid

- 1 Misalkan $M \subset \mathbb{R}^3$ permukaan di $\mathbb{R}^3$ dan $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ suatu medan vektor artinya $X(p) \in T_p(M)$ untuk setiap $p \in M$

2





Turunan Kovarian di Ruang Euclid

- 1 Misalkan $M \subset \mathbb{R}^3$ permukaan di $\mathbb{R}^3$ dan $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ suatu medan vektor artinya $X(p) \in T_p(M)$ untuk setiap $p \in M$



Turunan Kovarian di Ruang Euclid

- 1 Misalkan $M \subset \mathbb{R}^3$ permukaan di $\mathbb{R}^3$ dan $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ suatu medan vektor artinya $X(p) \in T_p(M)$ untuk setiap $p \in M$
- 2 Tetapi disini disyaratkan juga bahwa

$$X \circ x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

merupakan fungsi yang dapat diturunkan.



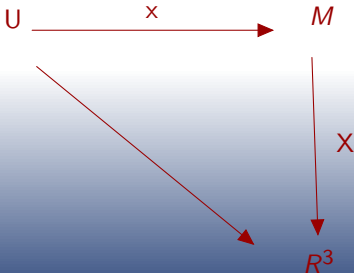
Turunan Kovarian di Ruang Euclid

- 1 Misalkan $M \subset \mathbb{R}^3$ permukaan di $\mathbb{R}^3$ dan $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ suatu medan vektor artinya $X(p) \in T_p(M)$ untuk setiap $p \in M$
- 2 Tetapi disini disyaratkan juga bahwa

$$X \circ x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

merupakan fungsi yang dapat diturunkan.

3





Turunan Kovarian

- 1 Misalkan $M \subset \mathbb{R}^3$ permukaan di $\mathbb{R}^3$ dan $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ suatu medan vektor artinya $X(p) \in T_p(M)$ untuk setiap $p \in M$



Turunan Kovarian

- 1 Misalkan $M \subset \mathbb{R}^3$ permukaan di $\mathbb{R}^3$ dan $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ suatu medan vektor artinya $X(p) \in T_p(M)$ untuk setiap $p \in M$
- 2 Tetapi disini disyaratkan juga bahwa

$$X \circ x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

merupakan fungsi yang dapat diturunkan.



Turunan Kovarian

- 1 Misalkan $M \subset \mathbb{R}^3$ permukaan di $\mathbb{R}^3$ dan $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ suatu medan vektor artinya $X(p) \in T_p(M)$ untuk setiap $p \in M$
- 2 Tetapi disini disyaratkan juga bahwa

$$X \circ x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

merupakan fungsi yang dapat diturunkan.

- 3 Jadi, kita dapat menurunkan terhadap parameter permukaan u, v



Turunan Kovarian di Permukaan

① Misalkan $M \subset \mathbb{R}^3$ permukaan di $\mathbb{R}^3$ dan $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$



Turunan Kovarian di Permukaan

- 1 Misalkan $M \subset \mathbb{R}^3$ permukaan di $\mathbb{R}^3$ dan $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$
- 2 Seperti turunan berarah terhadap fungsi, misalkan $P \in M$ dan $V \in T_P(M)$ selanjutnya lengkungan α di M dengan $\alpha(0) = P$ dan $\alpha'(0) = V$.



Turunan Kovarian di Permukaan

- 1 Misalkan $M \subset \mathbb{R}^3$ permukaan di $\mathbb{R}^3$ dan $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$
- 2 Seperti turunan berarah terhadap fungsi, misalkan $P \in M$ dan $V \in T_P(M)$ selanjutnya lengkungan α di M dengan $\alpha(0) = P$ dan $\alpha'(0) = V$.
- 3 Turunan berarah dari medan vektor X adalah

$$D_V X|_P = (X \circ \alpha)'(0)$$



Turunan Kovarian di Permukaan

Definition

- Misalkan diketahui medan vektor X dan $V \in T_P M$, turunan kovarian di titik P adalah

$$\begin{aligned}\nabla_V X &= (D_V X)^\parallel = \text{proyeksi } D_V X \text{ pada } T_P M \\ &= D_V X - (D_V X \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}\end{aligned}$$

Definition



Turunan Kovarian di Permukaan

Definition

- Misalkan diketahui medan vektor X dan $V \in T_P M$, turunan kovarian di titik P adalah

$$\begin{aligned}\nabla_V X &= (D_V X)^\parallel = \text{proyeksi } D_V X \text{ pada } T_P M \\ &= D_V X - (D_V X \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}\end{aligned}$$

Definition

- Suatu medan vektor X disebut konstant kovarian atau parallel sepanjang lengkungan α jika

$$\nabla_{\alpha'(t)} X = 0$$

untuk setiap t .



Turunan Kovarian di Permukaan: Contoh

- Misalkan M permukaan bola satuan dan α lingkaran besar di bola.



Turunan Kovarian di Permukaan: Contoh

- Misalkan M permukaan bola satuan dan α lingkaran besar di bola.
- Misalkan X medan vektor satuan. Bagaimana turunan kovarian X .



Turunan Kovarian di Permukaan: Contoh

- Misalkan M permukaan bola satuan dan α lingkaran besar di bola.
- Misalkan X medan vektor satuan. Bagaimana turunan kovarian X .
- Turunannya tentu mengarah ke titik pusat lingkaran besar yang juga pusat bola.



Turunan Kovarian di Permukaan: Contoh

- Misalkan M permukaan bola satuan dan α lingkaran besar di bola.
- Misalkan X medan vektor satuan. Bagaimana turunan kovarian X .
- Turunannya tentu mengarah ke titik pusat lingkaran besar yang juga pusat bola.
- Jadi, turunan kovarian sama dengan nol.



Turunan Kovarian di Permukaan: Contoh

- Misalkan M permukaan bola satuan dan α lingkaran besar di bola.
- Misalkan X medan vektor satuan. Bagaimana turunan kovarian X .
- Turunannya tentu mengarah ke titik pusat lingkaran besar yang juga pusat bola.
- Jadi, turunan kovarian sama dengan nol.
- Artinya, medan vektor satuan ini parallel sepanjang lengkungan α .



Turunan Kovarian di Permukaan: Contoh

- Misalkan M permukaan bola satuan dan α lingkaran besar di bola.
- Misalkan X medan vektor satuan. Bagaimana turunan kovarian X .
- Turunannya tentu mengarah ke titik pusat lingkaran besar yang juga pusat bola.
- Jadi, turunan kovarian sama dengan nol.
- Artinya, medan vektor satuan ini parallel sepanjang lengkungan α .
- Contoh eksplisit, $X(p) = (0, 0, 1)$ merupakan medan vektor parallel sepanjang lingkaran besar $z = 0$



Turunan Kovarian di Permukaan

- 1 Misalkan $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ suatu permukaan, dalam hal ini kita mempunyai



Turunan Kovarian di Permukaan

- 1 Misalkan $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ suatu permukaan, dalam hal ini kita mempunyai

2

$$\nabla_{\mathbf{x}_u} \mathbf{x}_u = (\mathbf{x}_{uu})^{\parallel} = \Gamma_{uu}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{uu}^v \mathbf{x}_v$$

$$\nabla_{\mathbf{x}_v} \mathbf{x}_u = (\mathbf{x}_{uv})^{\parallel} = \Gamma_{uv}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{uv}^v \mathbf{x}_v = \nabla_{\mathbf{x}_u} \mathbf{x}_v$$

$$\nabla_{\mathbf{x}_v} \mathbf{x}_v = (\mathbf{x}_{vv})^{\parallel} = \Gamma_{vv}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{vv}^v \mathbf{x}_v$$



Keujudan Medan Vektor Parallel

Theorem

Misalkan I interval di $\mathbb{R}$ dengan $0 \in I$.

- Misalkan $\alpha : I \rightarrow M$ dengan $\alpha(0) = P$ dan $X_0 \in T_P M$

Proof.



Keujudan Medan Vektor Parallel

Theorem

Misalkan I interval di $\mathbb{R}$ dengan $0 \in I$.

- Misalkan $\alpha : I \rightarrow M$ dengan $\alpha(0) = P$ dan $X_0 \in T_P M$
- maka ada medan vektor parallel X sepanjang α dengan $X(P) = X_0$

Proof.



Keujudan Medan Vektor Parallel

Theorem

Misalkan I interval di $\mathbb{R}$ dengan $0 \in I$.

- Misalkan $\alpha : I \rightarrow M$ dengan $\alpha(0) = P$ dan $X_0 \in T_P M$
- maka ada medan vektor parallel X sepanjang α dengan $X(P) = X_0$

Proof.

- Misalkan α lengkungan di permukaan $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ dengan $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ dan tuliskan

$$X(\alpha(t)) = a(t) \mathbf{x}_u(u(t), v(t)) + b(t) \mathbf{x}_v(u(t), v(t))$$

dengan $a(t)$ dan $b(t)$ akan dicari.



Keujudan Medan Vektor Parallel

Proof.

- Misalkan α lengkungan di permukaan $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ dengan $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ dan tuliskan

$$X(\alpha(t)) = a(t) \mathbf{x}_u(u(t), v(t)) + b(t) \mathbf{x}_v(u(t), v(t))$$

dengan $a(t)$ dan $b(t)$ akan dicari.





Keujudan Medan Vektor Parallel

Proof.

- Misalkan α lengkungan di permukaan $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ dengan $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ dan tuliskan

$$X(\alpha(t)) = a(t) \mathbf{x}_u(u(t), v(t)) + b(t) \mathbf{x}_v(u(t), v(t))$$

dengan $a(t)$ dan $b(t)$ akan dicari.

- $\alpha'(t) = u'(t) \mathbf{x}_u(u(t), v(t)) + v'(t) \mathbf{x}_v(u(t), v(t))$





Keujudan Medan Vektor Parallel

Proof.

- Misalkan α lengkungan di permukaan $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ dengan $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ dan tuliskan

$$X(\alpha(t)) = a(t) \mathbf{x}_u(u(t), v(t)) + b(t) \mathbf{x}_v(u(t), v(t))$$

dengan $a(t)$ dan $b(t)$ akan dicari.

- $\alpha'(t) = u'(t) \mathbf{x}_u(u(t), v(t)) + v'(t) \mathbf{x}_v(u(t), v(t))$

- Selanjutnya $\nabla_{\alpha'(t)} X = \left((X \circ \alpha)'(t) \right)^\parallel$

$$= \left(\frac{d}{dt} (a(t) \mathbf{x}_u(u(t), v(t)) + b(t) \mathbf{x}_v(u(t), v(t))) \right)^\parallel$$





Keujudan Medan Vektor Parallel

Proof.

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Selanjutnya } \nabla_{\alpha'(t)} X &= \left((X \circ \alpha)'(t) \right)^\parallel \\ &= \left(\frac{d}{dt} (a(t) \mathbf{x}_u(u(t), v(t)) + b(t) \mathbf{x}_v(u(t), v(t))) \right)^\parallel \end{aligned}$$





Keujudan Medan Vektor Parallel

Proof.

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Selanjutnya } \nabla_{\alpha'(t)} X &= \left((X \circ \alpha)'(t) \right)^{\parallel} \\ &= \left(\frac{d}{dt} (a(t) \mathbf{x}_u(u(t), v(t)) + b(t) \mathbf{x}_v(u(t), v(t))) \right)^{\parallel} \\ \bullet \\ &= a'(t) \mathbf{x}_u + b'(t) \mathbf{x}_v \\ &\quad + a(t) \left(\frac{d}{dt} \mathbf{x}_u(u(t), v(t)) \right)^{\parallel} + b(t) \left(\frac{d}{dt} \mathbf{x}_v(u(t), v(t)) \right)^{\parallel} \end{aligned}$$





Keujudan Medan Vektor Parallel

Proof.



$$\begin{aligned} &= a'(t) \mathbf{x}_u + b'(t) \mathbf{x}_v \\ &+ a(t) \left(\frac{d}{dt} \mathbf{x}_u(u(t), v(t)) \right) + b(t) \left(\frac{d}{dt} \mathbf{x}_v(u(t), v(t)) \right) \end{aligned}$$





Keujudan Medan Vektor Parallel

Proof.

•

$$= a'(t) \mathbf{x}_u + b'(t) \mathbf{x}_v \\ + a(t) \left(\frac{d}{dt} \mathbf{x}_u(u(t), v(t)) \right)^\parallel + b(t) \left(\frac{d}{dt} \mathbf{x}_v(u(t), v(t)) \right)^\parallel$$

•

$$= a'(t) \mathbf{x}_u + b'(t) \mathbf{x}_v \\ + a(t) (u'(t) \mathbf{x}_{uu} + v'(t) \mathbf{x}_{uv})^\parallel + b(t) (u'(t) \mathbf{x}_{vu} + v'(t) \mathbf{x}_{vv})^\parallel$$





Keujudan Medan Vektor Parallel

Proof.



$$\begin{aligned} &= a'(t) \mathbf{x}_u + b'(t) \mathbf{x}_v \\ &+ a(t) (u'(t) \mathbf{x}_{uu} + v'(t) \mathbf{x}_{uv}) + b(t) (u'(t) \mathbf{x}_{vu} + v'(t) \mathbf{x}_{vv}) \end{aligned}$$





Keujudan Medan Vektor Parallel

Proof.



$$\begin{aligned} &= a'(t) \mathbf{x}_u + b'(t) \mathbf{x}_v \\ &+ a(t) (u'(t) \mathbf{x}_{uu} + v'(t) \mathbf{x}_{uv}) + b(t) (u'(t) \mathbf{x}_{vu} + v'(t) \mathbf{x}_{vv}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= a'(t) \mathbf{x}_u + b'(t) \mathbf{x}_v \\ &+ a(t) (u'(t) (\Gamma_{uu}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{uu}^v \mathbf{x}_v) + v'(t) (\Gamma_{uv}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{uv}^v \mathbf{x}_v)) \\ &+ b(t) (u'(t) (\Gamma_{uv}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{uv}^v \mathbf{x}_v) + v'(t) (\Gamma_{vv}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{vv}^v \mathbf{x}_v)) \end{aligned}$$





Keujudan Medan Vektor Parallel

Proof.



$$\begin{aligned} &= a'(t) \mathbf{x}_u + b'(t) \mathbf{x}_v \\ &+ a(t) (u'(t) (\Gamma_{uu}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{uu}^v \mathbf{x}_v) + v'(t) (\Gamma_{uv}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{uv}^v \mathbf{x}_v)) \\ &+ b(t) (u'(t) (\Gamma_{uv}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{uv}^v \mathbf{x}_v) + v'(t) (\Gamma_{vv}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{vv}^v \mathbf{x}_v)) \end{aligned}$$





Keujudan Medan Vektor Parallel

Proof.



$$\begin{aligned}
 &= a'(t) \mathbf{x}_u + b'(t) \mathbf{x}_v \\
 &+ a(t) (u'(t) (\Gamma_{uu}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{uv}^u \mathbf{x}_v) + v'(t) (\Gamma_{uv}^u \mathbf{x}_u + \Gamma_{vv}^u \mathbf{x}_v)) \\
 &+ b(t) (u'(t) (\Gamma_{uv}^v \mathbf{x}_u + \Gamma_{vv}^v \mathbf{x}_v) + v'(t) (\Gamma_{vv}^v \mathbf{x}_u + \Gamma_{vv}^v \mathbf{x}_v))
 \end{aligned}$$

- Akan disusun menjadi $(\quad) \mathbf{x}_u + (\quad) \mathbf{x}_v = 0$. Jadi

$$\begin{aligned}
 a'(t) + a(t) (\Gamma_{uu}^u u'(t) + \Gamma_{uv}^u v'(t)) + b(t) (\Gamma_{vu}^u u'(t) + \Gamma_{vv}^u v'(t)) &= 0 \\
 b'(t) + a(t) (\Gamma_{uv}^v u'(t) + \Gamma_{vv}^v v'(t)) + b(t) (\Gamma_{vu}^v u'(t) + \Gamma_{vv}^v v'(t)) &= 0
 \end{aligned}$$

dengan syarat awal $X(P) = X_0$.



Keujudan Medan Vektor Parallel

- 1 Jika $Q = \alpha(1)$ ujung akhir, maka vektor $X(Q)$ disebut vektor yang sejajar X_0 di α sepanjang lengkungan α .



Keujudan Medan Vektor Parallel

- 1 Jika $Q = \alpha(1)$ ujung akhir, maka vektor $X(Q)$ disebut vektor yang sejajar X_0 di α sepanjang lengkungan α .
- 2 Perhatikan bahwa persamaan diferensial tersebut hanya bergantung bentuk pertama saja!



Keujudan Medan Vektor Parallel: Contoh

- 1 Misalkan diketahui bola $\mathbf{x}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$ dengan $0 < u < \pi, 0 \leq v < 2\pi$



Keujudan Medan Vektor Parallel: Contoh

- 1 Misalkan diketahui bola $\mathbf{x}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$ dengan $0 < u < \pi, 0 \leq v < 2\pi$
- 2 Misalkan $u = u_0$ ($u_0 \neq 0, \pi$) di permukaan bola satuan yaitu ketinggian konstan



Keujudan Medan Vektor Parallel: Contoh

- 1 Misalkan diketahui bola $\mathbf{x}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$ dengan $0 < u < \pi, 0 \leq v < 2\pi$
- 2 Misalkan $u = u_0$ ($u_0 \neq 0, \pi$) di permukaan bola satuan yaitu ketinggian konstan
- 3 Misalkan di $v = 0$ dan $X_0 = \mathbf{x}_v$ akan dicari vektor parallel sepanjang satu putaran.



Keujudan Medan Vektor Parallel: Contoh

- 1 Misalkan diketahui bola $\mathbf{x}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$ dengan $0 < u < \pi, 0 \leq v < 2\pi$
- 2 Misalkan $u = u_0$ ($u_0 \neq 0, \pi$) di permukaan bola satuan yaitu ketinggian konstan
- 3 Misalkan di $v = 0$ dan $X_0 = \mathbf{x}_v$ akan dicari vektor parallel sepanjang satu putaran.
- 4 Lengkungan $\alpha(t) = (u_0, t)$ atau $u(t) = u_0$ dan $v(t) = t$ dengan $0 \leq t \leq 2\pi$.



Keujudan Medan Vektor Parallel: Contoh

- 1 Misalkan diketahui bola $\mathbf{x}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$ dengan $0 < u < \pi, 0 \leq v < 2\pi$
- 2 Misalkan $u = u_0$ ($u_0 \neq 0, \pi$) di permukaan bola satuan yaitu ketinggian konstan
- 3 Misalkan di $v = 0$ dan $X_0 = \mathbf{x}_v$ akan dicari vektor parallel sepanjang satu putaran.
- 4 Lengkungan $\alpha(t) = (u_0, t)$ atau $u(t) = u_0$ dan $v(t) = t$ dengan $0 \leq t \leq 2\pi$.

5

$$a'(t) = \sin u_0 \cos u_0 b(t)$$

$$b'(t) = -a(t) \cot u_0$$

dengan $a(0) = 0$ dan $b(0) = 1$



Keujudan Medan Vektor Parallel: Contoh

1

$$a'(t) = \sin u_0 \cos u_0 b(t)$$

$$b'(t) = -a(t) \cot u_0$$

dengan $a(0) = 0$ dan $b(0) = 1$.



Keujudan Medan Vektor Parallel: Contoh

1

$$a'(t) = \sin u_0 \cos u_0 b(t)$$

$$b'(t) = -a(t) \cot u_0$$

dengan $a(0) = 0$ dan $b(0) = 1$.

2 Dengan demikian

$$b''(t) = -a'(t) \cot u_0 = -b(t) \cos^2 u_0$$

dengan $b(0) = 1$.



Keujudan Medan Vektor Parallel: Contoh

1

$$a'(t) = \sin u_0 \cos u_0 b(t)$$

$$b'(t) = -a(t) \cot u_0$$

dengan $a(0) = 0$ dan $b(0) = 1$.

2 Dengan demikian

$$b''(t) = -a'(t) \cot u_0 = -b(t) \cos^2 u_0$$

dengan $b(0) = 1$.

3 Jadi $b(t) = c_1 \cos(t \cos u_0) + c_2 \sin(t \cos u_0)$ dengan syarat awal

$$a(t) = \sin u_0 \sin(t \cos u_0)$$

$$b(t) = \cos(t \cos u_0)$$



Sifat Vektor Parallel

Theorem

- *Translasi parallel mengawetkan panjang dan sudut*

Proof.





Sifat Vektor Parallel

Theorem

- *Translasi parallel mengawetkan panjang dan sudut*
- *Misalkan X dan Y dua vektor parallel sepanjang lengkungan α dari P dan Q , maka*

Proof.





Sifat Vektor Parallel

Theorem

- *Translasi parallel mengawetkan panjang dan sudut*
- *Misalkan X dan Y dua vektor parallel sepanjang lengkungan α dari P dan Q , maka*
- $\|X(P)\| = \|X(Q)\|$ *dan*

Proof.





Sifat Vektor Parallel

Theorem

- *Translasi parallel mengawetkan panjang dan sudut*
- *Misalkan X dan Y dua vektor parallel sepanjang lengkungan α dari P dan Q , maka*
- $\|X(P)\| = \|X(Q)\|$ dan
- *sudut antara $X(P)$ dan $Y(P)$ akan sama dengan sudut antara $X(Q)$ dan $Y(Q)$*

Proof.





Sifat Vektor Parallel

Theorem

- *Translasi parallel mengawetkan panjang dan sudut*
- *Misalkan X dan Y dua vektor parallel sepanjang lengkungan α dari P dan Q , maka*
- $\|X(P)\| = \|X(Q)\|$ dan
- *sudut antara $X(P)$ dan $Y(P)$ akan sama dengan sudut antara $X(Q)$ dan $Y(Q)$*

Proof.

- Definisikan $f(t) = X(\alpha(t)) \cdot Y(\alpha(t))$





Sifat Vektor Parallel

Proof.

- Definisikan $f(t) = X(\alpha(t)) \cdot Y(\alpha(t))$



Sifat Vektor Parallel

Proof.

- Definisikan $f(t) = X(\alpha(t)) \cdot Y(\alpha(t))$
- Kita turunkan terhadap t

$$f'(t) = (X \circ \alpha)'(t) \cdot (Y \circ \alpha)(t) + (X \circ \alpha)(t) \cdot (Y \circ \alpha)'(t)$$



Sifat Vektor Parallel

Proof.

- Definisikan $f(t) = X(\alpha(t)) \cdot Y(\alpha(t))$
- Kita turunkan terhadap t

$$f'(t) = (X \circ \alpha)'(t) \cdot (Y \circ \alpha)(t) + (X \circ \alpha)(t) \cdot (Y \circ \alpha)'(t)$$



$$\begin{aligned} f'(t) &= D_{\alpha'(t)} X \cdot Y + X \cdot D_{\alpha'(t)} Y \\ &= \nabla_{\alpha'(t)} X \cdot Y + X \cdot \nabla_{\alpha'(t)} Y \end{aligned}$$



Sifat Vektor Parallel

Proof.

- Definisikan $f(t) = X(\alpha(t)) \cdot Y(\alpha(t))$
- Kita turunkan terhadap t

$$f'(t) = (X \circ \alpha)'(t) \cdot (Y \circ \alpha)(t) + (X \circ \alpha)(t) \cdot (Y \circ \alpha)'(t)$$

•

$$\begin{aligned} f'(t) &= D_{\alpha'(t)} X \cdot Y + X \cdot D_{\alpha'(t)} Y \\ &= \nabla_{\alpha'(t)} X \cdot Y + X \cdot \nabla_{\alpha'(t)} Y \end{aligned}$$

- Karena $D_{\alpha'(t)} X \cdot Y = \left(D_{\alpha'(t)} X \right)^{\parallel} \cdot Y \neq \nabla_{\alpha'(t)} X \cdot Y$



Sifat Vektor Parallel

Proof.

- Definisikan $f(t) = X(\alpha(t)) \cdot Y(\alpha(t))$
- Kita turunkan terhadap t

$$f'(t) = (X \circ \alpha)'(t) \cdot (Y \circ \alpha)(t) + (X \circ \alpha)(t) \cdot (Y \circ \alpha)'(t)$$

•

$$\begin{aligned} f'(t) &= D_{\alpha'(t)} X \cdot Y + X \cdot D_{\alpha'(t)} Y \\ &= \nabla_{\alpha'(t)} X \cdot Y + X \cdot \nabla_{\alpha'(t)} Y \end{aligned}$$

- Karena $D_{\alpha'(t)} X \cdot Y = (D_{\alpha'(t)} X)^\parallel \cdot Y \neq \nabla_{\alpha'(t)} X \cdot Y$
- Karena X, Y medan vektor parallel, maka $\nabla_{\alpha'(t)} X = 0$ dan $\nabla_{\alpha'(t)} Y = 0$



Geodesik: Lintasan Gerak Tanpa Percepatan

Definition

- Lengkungan α disebut geodesik jika



Geodesik: Lintasan Gerak Tanpa Percepatan

Definition

- Lengkungan α disebut geodesik jika



$$\nabla_{\alpha'(t)} \alpha'(t) = 0$$



Geodesik: Lintasan Gerak Tanpa Percepatan

Definition

- Lengkungan α disebut geodesik jika



$$\nabla_{\alpha'(t)} \alpha'(t) = 0$$

- Jadi kecepatan lengkungan harus parallel sepanjang lengkungan.



Geodesik: Lintasan Gerak Tanpa Percepatan

Definition

- Lengkungan α disebut geodesik jika



$$\nabla_{\alpha'(t)} \alpha'(t) = 0$$

- Jadi kecepatan lengkungan harus parallel sepanjang lengkungan.
- Karena vektor yang parallel, panjang vektor tetap, artinya laju dari gerak selalu tetap. Tanpa harus diparameter oleh panjang lengkungan.



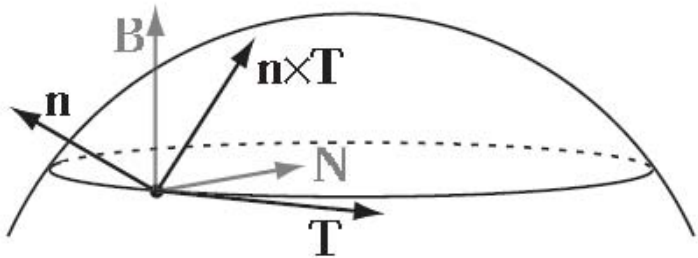
Geodesik: Lintasan Gerak Tanpa Percepatan

- Misalkan α lengkungan yang sudah diparameter dengan panjang lengkungan pada suatu permukaan M .



Geodesik: Lintasan Gerak Tanpa Percepatan

- Misalkan α lengkungan yang sudah diparameter dengan panjang lengkungan pada suatu permukaan M .
- Kita sudah melihat frame Frenet, tetapi juga ada frame Darboux untuk α , yaitu $\{T = \alpha'(s), \mathbf{n} \times T, \mathbf{n}\}$



The Frenet and Darboux frames



Geodesik: Lintasan Gerak Tanpa Percepatan

- Misalkan α lengkungan yang sudah diparameter dengan panjang lengkungan pada suatu permukaan M . Kita sudah melihat frame Frenet, tetapi juga ada frame Darboux untuk α , yaitu $\{T = \alpha'(s), \mathbf{n} \times T, \mathbf{n}\}$



Geodesik: Lintasan Gerak Tanpa Percepatan

- Misalkan α lengkungan yang sudah diparameter dengan panjang lengkungan pada suatu permukaan M . Kita sudah melihat frame Frenet, tetapi juga ada frame Darboux untuk α , yaitu $\{T = \alpha'(s), \mathbf{n} \times T, \mathbf{n}\}$
- Perhatikan bahwa $\{T, \mathbf{n} \times T\}$ merupakan basis di $T_P(M)$.



Geodesik: Lintasan Gerak Tanpa Percepatan

- Misalkan α lengkungan yang sudah diparameter dengan panjang lengkungan pada suatu permukaan M . Kita sudah melihat frame Frenet, tetapi juga ada frame Darboux untuk α , yaitu $\{T = \alpha'(s), \mathbf{n} \times T, \mathbf{n}\}$
- Perhatikan bahwa $\{T, \mathbf{n} \times T\}$ merupakan basis di $T_P(M)$.
- Selanjutnya, dengan memanfaatkan frame Darboux, kita memperoleh

$$\kappa N = \underbrace{(\kappa N \cdot (\mathbf{n} \times T))}_{\kappa_g} (\mathbf{n} \times T) + \underbrace{(\kappa N \cdot \mathbf{n})}_{\kappa_n} \mathbf{n}$$



Geodesik: Lintasan Gerak Tanpa Percepatan

- Misalkan α lengkungan yang sudah diparameter dengan panjang lengkungan pada suatu permukaan M . Kita sudah melihat frame Frenet, tetapi juga ada frame Darboux untuk α , yaitu $\{T = \alpha'(s), \mathbf{n} \times T, \mathbf{n}\}$
- Perhatikan bahwa $\{T, \mathbf{n} \times T\}$ merupakan basis di $T_P(M)$.
- Selanjutnya, dengan memanfaatkan frame Darboux, kita memperoleh

$$\kappa N = \underbrace{(\kappa N \cdot (\mathbf{n} \times T))}_{\kappa_g} (\mathbf{n} \times T) + \underbrace{(\kappa N \cdot \mathbf{n})}_{\kappa_n} \mathbf{n}$$

- Perhatikan bahwa $\kappa_n = (\kappa N \cdot \mathbf{n})$ kelengkungan bagian normal permukaan



Geodesik: Lintasan Gerak Tanpa Percepatan

- Misalkan α lengkungan yang sudah diparameter dengan panjang lengkungan pada suatu permukaan M . Kita sudah melihat frame Frenet, tetapi juga ada frame Darboux untuk α , yaitu $\{T = \alpha'(s), \mathbf{n} \times T, \mathbf{n}\}$
- Perhatikan bahwa $\{T, \mathbf{n} \times T\}$ merupakan basis di $T_P(M)$.
- Selanjutnya, dengan memanfaatkan frame Darboux, kita memperoleh

$$\kappa N = \underbrace{(\kappa N \cdot (\mathbf{n} \times T))}_{\kappa_g} (\mathbf{n} \times T) + \underbrace{(\kappa N \cdot \mathbf{n})}_{\kappa_n} \mathbf{n}$$

- Perhatikan bahwa $\kappa_n = (\kappa N \cdot \mathbf{n})$ kelengkungan bagian normal permukaan
- dan $\kappa_g = \kappa N \cdot (\mathbf{n} \times T)$ kelengkungan di permukaan dan disebut kelengkungan geodesik.



Geodesik: Lintasan Gerak Tanpa Percepatan

- Selanjutnya, dengan memanfaatkan frame Darboux, kita memperoleh

$$\kappa N = \underbrace{(\kappa N \cdot (\mathbf{n} \times T))}_{\kappa_g} (\mathbf{n} \times T) + \underbrace{(\kappa N \cdot \mathbf{n})}_{\kappa_n} \mathbf{n}$$

Perhatikan bahwa $\kappa_n = (\kappa N \cdot \mathbf{n})$ kelengkungan bagian normal permukaan dan $\kappa_g = \kappa N \cdot (\mathbf{n} \times T)$ kelengkungan di permukaan dan disebut kelengkungan geodesik.



Geodesik: Lintasan Gerak Tanpa Percepatan

- Selanjutnya, dengan memanfaatkan frame Darboux, kita memperoleh

$$\kappa N = \underbrace{(\kappa N \cdot (\mathbf{n} \times T))}_{\kappa_g} (\mathbf{n} \times T) + \underbrace{(\kappa N \cdot \mathbf{n})}_{\kappa_n} \mathbf{n}$$

Perhatikan bahwa $\kappa_n = (\kappa N \cdot \mathbf{n})$ kelengkungan bagian normal permukaan dan $\kappa_g = \kappa N \cdot (\mathbf{n} \times T)$ kelengkungan di permukaan dan disebut kelengkungan geodesik.

- Geodesik tanpa percepatan, maka suatu lengkungan adalah geodesik jika dan hanya jika $\kappa_g = 0$.



Geodesik: Contoh

- 1 Kita akan mencari geodesik di permukaan bola.



Geodesik: Contoh

- 1 Kita akan mencari geodesik di permukaan bola.
- 2 Misalkan α merupakan geodesik di permukaan bola, karena $\kappa_g = 0$, maka $\alpha''(s)$ merupakan kelipatan dari $\alpha(s)$ (karena bola) untuk setiap s .



Geodesik: Contoh

- 1 Kita akan mencari geodesik di permukaan bola.
- 2 Misalkan α merupakan geodesik di permukaan bola, karena $\kappa_g = 0$, maka $\alpha''(s)$ merupakan kelipatan dari $\alpha(s)$ (karena bola) untuk setiap s .
- 3 Dengan demikian $\alpha'' \times \alpha = 0$ (Ini adalah turunan $\alpha' \times \alpha$, maka $\alpha' \times \alpha = \mathbf{A}$ konstan)



Geodesik: Contoh

- 1 Kita akan mencari geodesik di permukaan bola.
- 2 Misalkan α merupakan geodesik di permukaan bola, karena $\kappa_g = 0$, maka $\alpha''(s)$ merupakan kelipatan dari $\alpha(s)$ (karena bola) untuk setiap s .
- 3 Dengan demikian $\alpha'' \times \alpha = 0$ (Ini adalah turunan $\alpha' \times \alpha$, maka $\alpha' \times \alpha = \mathbf{A}$ konstan)
- 4 Jadi α harus terletak di bidang dengan vektor normal $\mathbf{A}$



Geodesik: Contoh

- 1 Kita akan mencari geodesik di permukaan bola.
- 2 Misalkan α merupakan geodesik di permukaan bola, karena $\kappa_g = 0$, maka $\alpha''(s)$ merupakan kelipatan dari $\alpha(s)$ (karena bola) untuk setiap s .
- 3 Dengan demikian $\alpha'' \times \alpha = 0$ (Ini adalah turunan $\alpha' \times \alpha$, maka $\alpha' \times \alpha = \mathbf{A}$ konstan)
- 4 Jadi α harus terletak di bidang dengan vektor normal $\mathbf{A}$
- 5 Kalau bidang tidak melewati titik pusat bola akan mempunyai percepatan. Jadi haruslah melewati titik nol.



Geodesik: Persamaan

① Persamaan vektor parallel $X = ax_u + bx_v$ adalah

$$a'(t) + a(t) (\Gamma_{uu}^u u'(t) + \Gamma_{uv}^u v'(t)) + b(t) (\Gamma_{vu}^u u'(t) + \Gamma_{vv}^u v'(t)) = 0$$

$$b'(t) + a(t) (\Gamma_{uu}^v u'(t) + \Gamma_{uv}^v v'(t)) + b(t) (\Gamma_{vu}^v u'(t) + \Gamma_{vv}^v v'(t)) = 0$$



Geodesik: Persamaan

- ① Persamaan vektor parallel $X = ax_u + bx_v$ adalah

$$a'(t) + a(t) (\Gamma_{uu}^u u'(t) + \Gamma_{uv}^u v'(t)) + b(t) (\Gamma_{vu}^u u'(t) + \Gamma_{vv}^u v'(t)) = 0$$

$$b'(t) + a(t) (\Gamma_{uu}^v u'(t) + \Gamma_{uv}^v v'(t)) + b(t) (\Gamma_{vu}^v u'(t) + \Gamma_{vv}^v v'(t)) = 0$$

- ② Untuk geodesik $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$, maka $\alpha'(t) = u'x_u + v'x_v$ atau $a(t) = u'(t)$ dan $b(t) = v'(t)$.



Geodesik: Persamaan

- 1 Persamaan vektor parallel $X = ax_u + bx_v$ adalah

$$a'(t) + a(t) (\Gamma_{uu}^u u'(t) + \Gamma_{uv}^u v'(t)) + b(t) (\Gamma_{vu}^u u'(t) + \Gamma_{vv}^u v'(t)) = 0$$

$$b'(t) + a(t) (\Gamma_{uu}^v u'(t) + \Gamma_{uv}^v v'(t)) + b(t) (\Gamma_{vu}^v u'(t) + \Gamma_{vv}^v v'(t)) = 0$$

- 2 Untuk geodesik $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$, maka $\alpha'(t) = u'x_u + v'x_v$ atau $a(t) = u'(t)$ dan $b(t) = v'(t)$.

- 3 Jadi persamaan geodesik adalah

$$u''(t) + \Gamma_{uu}^u u'(t)^2 + 2\Gamma_{uv}^u u'(t) v'(t) + \Gamma_{vv}^u v'(t)^2 = 0$$

$$v''(t) + \Gamma_{uu}^v u'(t)^2 + 2\Gamma_{uv}^v u'(t) v'(t) + \Gamma_{vv}^v v'(t)^2 = 0$$



Geodesik: Contoh: Persamaan Clairaut

Theorem

- *Geodesik pada permukaan putar memenuhi persamaan*

$$r \cos \phi = \text{const}$$

dengan r jarak terhadap sumbu putar dan ϕ sudut antara geodesik dan garis parallel (yaitu garis hasil perpotongan permukaan dan bidang yang tegak lurus terhadap sumbu putar)

Proof.



Geodesik: Contoh: Persamaan Clairaut

Theorem

- *Geodesik pada permukaan putar memenuhi persamaan*

$$r \cos \phi = \text{const}$$

dengan r jarak terhadap sumbu putar dan ϕ sudut antara geodesik dan garis parallel (yaitu garis hasil perpotongan permukaan dan bidang yang tegak lurus terhadap sumbu putar)

- *Sebaliknya, sebarang lengkungan yang memenuhi persamaan di atas yang bukan garis parallel merupakan geodesik.*

Proof.



Geodesik: Contoh: Persamaan Clairaut

Theorem

- Geodesik pada permukaan putar memenuhi persamaan

$$r \cos \phi = \text{const}$$

dengan r jarak terhadap sumbu putar dan ϕ sudut antara geodesik dan garis parallel (yaitu garis hasil perpotongan permukaan dan bidang yang tegak lurus terhadap sumbu putar)

- Sebaliknya, sebarang lengkungan yang memenuhi persamaan di atas yang bukan garis parallel merupakan geodesik.

Proof.

- Untuk permukaan putar

$x(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(v))$ dengan

$$f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1$$



Geodesik: Contoh: Persamaan Clairaut

Proof.

- Untuk permukaan putar

$$x(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

$$\text{dengan } f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1.$$



Geodesik: Contoh: Persamaan Clairaut

Proof.

- Untuk permukaan putar

$$x(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

$$\text{dengan } f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1.$$

- Nilai bentuk pertama $E = 1$, $F = 0$ dan $G = f(u)^2$,
 $\Gamma_{uv}^v = \Gamma_{vu}^v = \frac{f'(u)}{f(u)}$, $\Gamma_{vv}^u = -f(u) f'(u)$ dan simbol Christoffel lainnya sama dengan 0.



Geodesik: Contoh: Persamaan Clairaut

Proof.

- Untuk permukaan putar

$$x(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

$$\text{dengan } f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1.$$

- Nilai bentuk pertama $E = 1$, $F = 0$ dan $G = f(u)^2$,
 $\Gamma_{uv}^v = \Gamma_{vu}^v = \frac{f'(u)}{f(u)}$, $\Gamma_{vv}^u = -f(u) f'(u)$ dan simbol Christoffel lainnya sama dengan 0.

- Sistem persamaan geodesik menjadi

$$u'' - f f' (v')^2 = 0$$

$$v'' + \frac{2f'}{f} u' v' = 0$$



Geodesik: Contoh: Persamaan Clairaut

Proof.

- Sistem persamaan geodesik menjadi

$$u'' - ff' (v')^2 = 0$$

$$v'' + \frac{2f'}{f} u' v' = 0$$



Geodesik: Contoh: Persamaan Clairaut

Proof.

- Sistem persamaan geodesik menjadi

$$u'' - ff' (v')^2 = 0$$

$$v'' + \frac{2f'}{f} u' v' = 0$$

- Dari persamaan kedua, dapat ditulis

$$\frac{v''}{v'} + 2 \frac{f'(u(t)) u'(t)}{f(u(t))} = 0$$



Geodesik: Contoh: Persamaan Clairaut

Proof.

- Sistem persamaan geodesik menjadi

$$u'' - ff' (v')^2 = 0$$

$$v'' + \frac{2f'}{f} u' v' = 0$$

- Dari persamaan kedua, dapat ditulis

$$\frac{v''}{v'} + 2 \frac{f'(u(t))}{f(u(t))} u'(t) = 0$$

- Dengan demikian

$$\ln(v'(t)) = -2 \ln f(u(t)) + \text{const}$$



Geodesik: Contoh: Persamaan Clairaut

Proof.

- Dengan demikian $\ln(v'(t)) = -2 \ln f(u(t)) + \text{const.}$ Jadi

$$v'(t) = \frac{c}{f(u(t))^2}$$



Geodesik: Contoh: Persamaan Clairaut

Proof.

- Dengan demikian $\ln(v'(t)) = -2 \ln f(u(t)) + \text{const.}$ Jadi

$$v'(t) = \frac{c}{f(u(t))^2}$$

- Artinya sepanjang geodesik, nilai

$$v'(t) f(u(t))^2 = v'(t) G = \text{const.}$$



Geodesik: Contoh: Persamaan Clairaut

Proof.

- Dengan demikian $\ln(v'(t)) = -2 \ln f(u(t)) + \text{const.}$ Jadi

$$v'(t) = \frac{c}{f(u(t))^2}$$

- Artinya sepanjang geodesik, nilai

$$v'(t) f(u(t))^2 = v'(t) G = \text{const.}$$

- Perhatikan bahwa ini adalah hasil kali dalam $x_v = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0)$ dan geodesik $\alpha'(t) = u'(t) x_u + v'(t) x_v$. Perhatikan $r = f(u)$ jarak ke pusat dan $v'(t) = x_u \cdot x_v$. Jadi $r \cos \phi = \text{const}$ sudah dipenuhi



Geodesik: Contoh: Persamaan Clairaut

Proof.

- Sebaliknya jika

$$\begin{aligned}\|\alpha'(t)\|^2 &= (u'(t))^2 + G(v'(t))^2 \\ &= (u'(t))^2 + (f(u))^2 (v'(t))^2 = \text{const}\end{aligned}$$



Geodesik: Contoh: Persamaan Clairaut

Proof.

- Sebaliknya jika

$$\begin{aligned}\|\alpha'(t)\|^2 &= (u'(t))^2 + G(v'(t))^2 \\ &= (u'(t))^2 + (f(u))^2 (v'(t))^2 = \text{const}\end{aligned}$$

- Turunkan ini

$$u'(t) u''(t) + (f(u))^2 v'(t) v''(t) + (v'(t))^2 f(u) f'(u) u'(t) = 0$$



Geodesik: Contoh: Persamaan Clairaut

Proof.

- Sebaliknya jika

$$\begin{aligned}\|\alpha'(t)\|^2 &= (u'(t))^2 + G(v'(t))^2 \\ &= (u'(t))^2 + (f(u))^2 (v'(t))^2 = \text{const}\end{aligned}$$

- Turunkan ini

$$u'(t) u''(t) + (f(u))^2 v'(t) v''(t) + (v'(t))^2 f(u) f'(u) u'(t) = 0$$

- Substitusikan pers. geodesik yang kedua $v'' + \frac{2f'}{f} u' v' = 0$ ke dalam pers ini, hasilnya

$$u'(t) \left(u''(t) - f(u(t)) f'(u(t)) v'(t)^2 \right) = 0$$



Geodesik: Contoh: Persamaan Clairaut

Proof.

- Turunkan ini

$$u'(t) u''(t) + (f(u))^2 v'(t) v''(t) + (v'(t))^2 f(u) f'(u) u'(t) = 0$$



Geodesik: Contoh: Persamaan Clairaut

Proof.

- Turunkan ini

$$u'(t) u''(t) + (f(u))^2 v'(t) v''(t) + (v'(t))^2 f(u) f'(u) u'(t) = 0$$

- Substitusikan pers. geodesik yang kedua $v'' + \frac{2f'}{f} u' v' = 0$ ke dalam pers ini, hasilnya

$$u'(t) \left(u''(t) - f(u(t)) f'(u(t)) v'(t)^2 \right) = 0$$



Geodesik: Contoh: Persamaan Clairaut

Proof.

- Turunkan ini

$$u'(t) u''(t) + (f(u))^2 v'(t) v''(t) + (v'(t))^2 f(u) f'(u) u'(t) = 0$$

- Substitusikan pers. geodesik yang kedua $v'' + \frac{2f'}{f} u' v' = 0$ ke dalam pers ini, hasilnya

$$u'(t) \left(u''(t) - f(u(t)) f'(u(t)) v'(t)^2 \right) = 0$$

- Jika $u'(t) \neq 0$, maka $u''(t) - f(u(t)) f'(u(t)) v'(t)^2 = 0$



Geodesik: Contoh: Persamaan Clairaut

Proof.

- Turunkan ini

$$u'(t) u''(t) + (f(u))^2 v'(t) v''(t) + (v'(t))^2 f(u) f'(u) u'(t) = 0$$

- Substitusikan pers. geodesik yang kedua $v'' + \frac{2f'}{f} u' v' = 0$ ke dalam pers ini, hasilnya

$$u'(t) \left(u''(t) - f(u(t)) f'(u(t)) v'(t)^2 \right) = 0$$

- Jika $u'(t) \neq 0$, maka $u''(t) - f(u(t)) f'(u(t)) v'(t)^2 = 0$
- Dengan demikian, jika ada lengkungan dengan $\|\alpha'(t)\|$ konstan, dan persamaan Clairaut dipenuhi, maka (pers kedua dari pers geodesik dipenuhi) dan maka pers pertama geodesik juga dipenuhi



Geodesik: Garis terpendek

- Misalkan kita memperhatikan titik $P \in M$ dan misalkan γ merupakan geodesik yang melalui titik P .



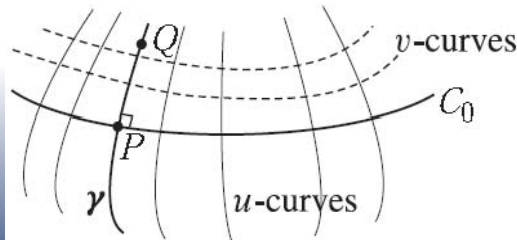
Geodesik: Garis terpendek

- Misalkan kita memperhatikan titik $P \in M$ dan misalkan γ merupakan geodesik yang melalui titik P .
- Kemudian gambarkan lengkungan C_0 melalui P dan orthogonal terhadap γ



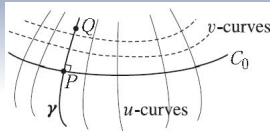
Geodesik: Garis terpendek

- Misalkan kita memperhatikan titik $P \in M$ dan misalkan γ merupakan geodesik yang melalui titik P .
- Kemudian gambarkan lengkungan C_0 melalui P dan orthogonal terhadap γ
- Selanjutnya pilih parameter $x(u, v)$ dengan $x(0, 0) = P$ dan lengkungan u tegak lurus terhadap C_0 dan lengkungan v tegak lurus terhadap lengkungan u (maka $F = 0$)



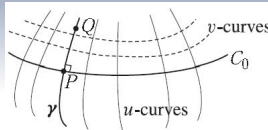


Geodesik: Garis terpendek





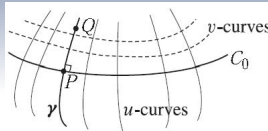
Geodesik: Garis terpendek



- Sekarang, misalkan $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ adalah lengkung dari $x(0,0) = P$ dan $Q = x(u_0, 0)$ maka



Geodesik: Garis terpendek

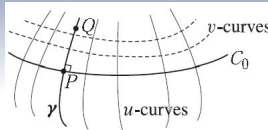


- Sekarang, misalkan $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ adalah lengkungan dari $x(0,0) = P$ dan $Q = x(u_0,0)$ maka

$$\text{panjang}(\alpha) = \int_a^b \sqrt{Eu'(t)^2 + Gv'(t)^2} dt \geq \int_a^b \sqrt{E} |u'(t)| dt$$



Geodesik: Garis terpendek



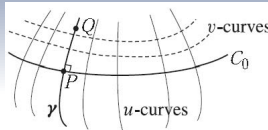
- Sekarang, misalkan $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ adalah lengkungan dari $x(0,0) = P$ dan $Q = x(u_0,0)$ maka

$$\text{panjang}(\alpha) = \int_a^b \sqrt{Eu'(t)^2 + Gv'(t)^2} dt \geq \int_a^b \sqrt{E} |u'(t)| dt$$

- yang terakhir merupakan panjang lengkungan geodesik.



Geodesik: Garis terpendek



- Sekarang, misalkan $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ adalah lengkungan dari $x(0,0) = P$ dan $Q = x(u_0,0)$ maka

$$\text{panjang}(\alpha) = \int_a^b \sqrt{Eu'(t)^2 + Gv'(t)^2} dt \geq \int_a^b \sqrt{E} |u'(t)| dt$$

- yang terakhir merupakan panjang lengkungan geodesik.
- Jadi, geodesik adalah lengkungan terpendek yang menghubungkan dua titik (lokal).