



Permukaan

Persamaan Codazzi dan Persamaan Gauss

Wono Setya Budhi

Februari, 2014

KK Analisis Geometri, FMIPA-ITB



Persamaan Codazzi dan Gauss

- 1 Pada bagian ini kita akan mencari nilai x_{uu} , x_{uv} dan x_{vv} dinyatakan dalam basis yang ada yaitu x_u , x_v dan $n = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}$



Persamaan Codazzi dan Gauss

- 1 Pada bagian ini kita akan mencari nilai x_{uu} , x_{uv} dan x_{vv} dinyatakan dalam basis yang ada yaitu x_u , x_v dan $n = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}$
- 2 Misalkan

$$x_{uu} = \Gamma_{uu}^u x_u + \Gamma_{uu}^v x_v + \textcolor{red}{l} n$$

$$x_{uv} = \Gamma_{uv}^u x_u + \Gamma_{uv}^v x_v + \textcolor{red}{m} n$$

$$x_{vv} = \Gamma_{vv}^u x_u + \Gamma_{vv}^v x_v + \textcolor{red}{n} n$$



Persamaan Codazzi dan Gauss

- 1 Pada bagian ini kita akan mencari nilai x_{uu} , x_{uv} dan x_{vv} dinyatakan dalam basis yang ada yaitu x_u , x_v dan $n = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}$
- 2 Misalkan

$$x_{uu} = \Gamma_{uu}^u x_u + \Gamma_{uu}^v x_v + \Gamma_{uu}^n n$$

$$x_{uv} = \Gamma_{uv}^u x_u + \Gamma_{uv}^v x_v + \Gamma_{uv}^n n$$

$$x_{vv} = \Gamma_{vv}^u x_u + \Gamma_{vv}^v x_v + \Gamma_{vv}^n n$$

- 3 Karena $x_{uv} = x_{vu}$, maka $\Gamma_{uv}^? = \Gamma_{vu}^?$. Fungsi $\Gamma_{??}^?$ disebut sebagai lambang Christoffel



Persamaan Codazzi dan Gauss

1 Misalkan

$$x_{uu} = \Gamma_{uu}^u x_u + \Gamma_{uu}^v x_v + l n$$

$$x_{uv} = \Gamma_{uv}^u x_u + \Gamma_{uv}^v x_v + m n$$

$$x_{vv} = \Gamma_{vv}^u x_u + \Gamma_{vv}^v x_v + n n$$



Persamaan Codazzi dan Gauss

1 Misalkan

$$x_{uu} = \Gamma_{uu}^u x_u + \Gamma_{uu}^v x_v + n$$

$$x_{uv} = \Gamma_{uv}^u x_u + \Gamma_{uv}^v x_v + n$$

$$x_{vv} = \Gamma_{vv}^u x_u + \Gamma_{vv}^v x_v + n$$

2 Karena $\{x_u, x_v\}$ tidak selalu orthogonal, maka

$$x_{uu} \cdot x_u = \Gamma_{uu}^u x_u \cdot x_u + \Gamma_{uu}^v x_v \cdot x_u$$

dst



Persamaan Codazzi dan Gauss

1 Misalkan

$$x_{uu} = \Gamma_{uu}^u x_u + \Gamma_{uu}^v x_v + l n$$

$$x_{uv} = \Gamma_{uv}^u x_u + \Gamma_{uv}^v x_v + m n$$

$$x_{vv} = \Gamma_{vv}^u x_u + \Gamma_{vv}^v x_v + n n$$

2 Karena $\{x_u, x_v\}$ tidak selalu orthogonal, maka

$$x_{uu} \cdot x_u = \Gamma_{uu}^u x_u \cdot x_u + \Gamma_{uu}^v x_v \cdot x_u$$

dst

3

$$x_{uu} \cdot x_u = \Gamma_{uu}^u E + \Gamma_{uu}^v F$$

$$x_{uv} \cdot x_u = \Gamma_{uv}^u F + \Gamma_{uv}^v G$$



Persamaan Codazzi dan Gauss

1

$$x_{uu} \cdot x_u = \Gamma_{uu}^u E + \Gamma_{uu}^v F$$

$$x_{uu} \cdot x_v = \Gamma_{uu}^u F + \Gamma_{uu}^v G$$



Persamaan Codazzi dan Gauss

1

$$x_{uu} \cdot x_u = \Gamma_{uu}^u E + \Gamma_{uu}^v F$$

$$x_{uu} \cdot x_v = \Gamma_{uu}^u F + \Gamma_{uu}^v G$$

2 Sedangkan $E = x_u \cdot x_u$, maka $E_u = \dots$ dan $x_{uu} \cdot x_u = \frac{1}{2} E_u$



Persamaan Codazzi dan Gauss

1

$$x_{uu} \cdot x_u = \Gamma_{uu}^u E + \Gamma_{uu}^v F$$

$$x_{uu} \cdot x_v = \Gamma_{uu}^u F + \Gamma_{uu}^v G$$

2 Sedangkan $E = x_u \cdot x_u$, maka $E_u = \dots$ dan $x_{uu} \cdot x_u = \frac{1}{2} E_u$

3 Untuk $x_{uu} \cdot x_v = (x_u \cdot x_v)_u - x_u \cdot x_{uv} = F_u - \frac{1}{2} E_v$, sebab

$$E_v = (x_u \cdot x_u)_v = 2x_u \cdot x_{uv}$$



Persamaan Codazzi dan Gauss

1

$$x_{uu} \cdot x_u = \Gamma_{uu}^u E + \Gamma_{uu}^v F$$

$$x_{uu} \cdot x_v = \Gamma_{uu}^u F + \Gamma_{uu}^v G$$

2 Sedangkan $E = x_u \cdot x_u$, maka $E_u = \dots$ dan $x_{uu} \cdot x_u = \frac{1}{2}E_u$

3 Untuk $x_{uu} \cdot x_v = (x_u \cdot x_v)_u - x_u \cdot x_{uv} = F_u - \frac{1}{2}E_v$, sebab

$$E_v = (x_u \cdot x_u)_v = 2x_u \cdot x_{uv}$$

4 Jadi

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{uu}^u \\ \Gamma_{uu}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{bmatrix}$$



Persamaan Codazzi dan Gauss

1 Lengkapnya

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{uu}^u \\ \Gamma_{uu}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{bmatrix}$$



Persamaan Codazzi dan Gauss

1 Lengkapnya

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{uu}^u \\ \Gamma_{uu}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{bmatrix}$$

2

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{uv}^u \\ \Gamma_{uv}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \end{bmatrix}$$



Persamaan Codazzi dan Gauss

1 Lengkapnya

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{uu}^u \\ \Gamma_{uu}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{bmatrix}$$

2

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{uv}^u \\ \Gamma_{uv}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \end{bmatrix}$$

3

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{vv}^u \\ \Gamma_{vv}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v \end{bmatrix}$$



Persamaan Codazzi dan Gauss

1 Lengkapnya

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{uu}^u \\ \Gamma_{uu}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{bmatrix}$$

2

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{uv}^u \\ \Gamma_{uv}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \end{bmatrix}$$

3

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{vv}^u \\ \Gamma_{vv}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v \end{bmatrix}$$

4 Komponen tangen dari x_{uu} , x_{uv} , x_{vv} cukup dihitung dari bentuk dasar pertama.



Matriks Penyajian Operator Bentuk

- ① Operator bentuk $S_p : T_p M \rightarrow T_p M$ terhadap basis $\{x_u, x_v\}$, yaitu
- $$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$



Matriks Penyajian Operator Bentuk

- 1 Operator bentuk $S_p : T_p M \rightarrow T_p M$ terhadap basis $\{x_u, x_v\}$, yaitu
$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$
- 2 Misalkan $S_p(x_u) = ax_u + bx_v$ dan $S_p(x_v) = cx_u + dx_v$. Kita harus mencari a, b, c, d .



Matriks Penyajian Operator Bentuk

- 1 Operator bentuk $S_p : T_p M \rightarrow T_p M$ terhadap basis $\{x_u, x_v\}$, yaitu
$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$
- 2 Misalkan $S_p(x_u) = ax_u + bx_v$ dan $S_p(x_v) = cx_u + dx_v$. Kita harus mencari a, b, c, d .
- 3 Untuk mencari $a, b,$

$$S_p(x_u) \cdot x_u = aE + bF$$

$$-D_{x_u} n \cdot x_u = aE + bF$$

$$x_u \cdot n = aE + bF$$

$$I = aE + bF$$



Matriks Penyajian Operator Bentuk

- ① Operator bentuk $S_p : T_p M \rightarrow T_p M$ terhadap basis $\{x_u, x_v\}$, yaitu
- $$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$



Matriks Penyajian Operator Bentuk

- 1 Operator bentuk $S_p : T_p M \rightarrow T_p M$ terhadap basis $\{x_u, x_v\}$, yaitu
$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$
- 2 Misalkan $S_p(x_u) = ax_u + bx_v$ dan $S_p(x_v) = cx_u + dx_v$. Kita harus mencari a, b, c, d .



Matriks Penyajian Operator Bentuk

- 1 Operator bentuk $S_p : T_p M \rightarrow T_p M$ terhadap basis $\{x_u, x_v\}$, yaitu
$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$
- 2 Misalkan $S_p(x_u) = ax_u + bx_v$ dan $S_p(x_v) = cx_u + dx_v$. Kita harus mencari a, b, c, d .
- 3 Untuk mencari a, b

$$l = aE + bF$$
$$m = aF + bG$$



Matriks Penyajian Operator Bentuk

① Untuk mencari a, b ,

$$l = aE + bF$$

$$m = aF + bG$$



Matriks Penyajian Operator Bentuk

1 Untuk mencari a, b ,

$$l = aE + bF$$

$$m = aF + bG$$

2 Jadi

$$\begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$



Matriks Penyajian Operator Bentuk

- 1 Untuk mencari a, b ,

$$\begin{aligned}I &= aE + bF \\ m &= aF + bG\end{aligned}$$

- 2 Jadi

$$\begin{bmatrix} I & m \\ m & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

- 3 Dengan demikian

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & m \\ m & n \end{bmatrix}$$



Matriks Penyajian Operator Bentuk

① Dengan demikian

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix}$$



Matriks Penyajian Operator Bentuk

1 Dengan demikian

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & m \\ m & n \end{bmatrix}$$

2

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} IG - mF & mG - nF \\ -IF + mE & -mF + nE \end{bmatrix}$$



Memanfaatkan Kesamaan Turunan ke Tiga

① Kita mengetahui bahwa

$$\mathbf{n}_u = D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n} = -S_p(\mathbf{x}_u) = -(a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v)$$

$$\mathbf{n}_v = D_{\mathbf{x}_v} \mathbf{n} = -S_p(\mathbf{x}_v) = -(c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v)$$



Memanfaatkan Kesamaan Turunan ke Tiga

1 Kita mengetahui bahwa

$$\mathbf{n}_u = D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n} = -S_p(\mathbf{x}_u) = -(a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v)$$

$$\mathbf{n}_v = D_{\mathbf{x}_v} \mathbf{n} = -S_p(\mathbf{x}_v) = -(c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v)$$

2 Pada awal slide, kita mempunyai

$$x_{uu} = \Gamma_{uu}^u x_u + \Gamma_{uu}^v x_v + l \mathbf{n}$$

$$x_{uv} = \Gamma_{uv}^u x_u + \Gamma_{uv}^v x_v + m \mathbf{n}$$

$$x_{vv} = \Gamma_{vv}^u x_u + \Gamma_{vv}^v x_v + n \mathbf{n}$$



Memanfaatkan Kesamaan Turunan ke Tiga

- 1 Kita mengetahui bahwa

$$\mathbf{n}_u = D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n} = -S_p(\mathbf{x}_u) = -(a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v)$$

$$\mathbf{n}_v = D_{\mathbf{x}_v} \mathbf{n} = -S_p(\mathbf{x}_v) = -(c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v)$$

- 2 Pada awal slide, kita mempunyai

$$x_{uu} = \Gamma_{uu}^u x_u + \Gamma_{uu}^v x_v + l n$$

$$x_{uv} = \Gamma_{uv}^u x_u + \Gamma_{uv}^v x_v + m n$$

$$x_{vv} = \Gamma_{vv}^u x_u + \Gamma_{vv}^v x_v + n n$$

- 3 Selanjutnya, dengan mencari $x_{uv} = x_{uv}$ dan menggunakan ke bebas linearan x_u, x_v dan n , maka akan diperoleh



Memanfaatkan Kesamaan Turunan ke Tiga

- ➊ Selanjutnya, dengan mencari $x_{u\,uv} = x_{uvu}$ dan menggunakan ke bebas linearan x_u, x_v dan n , maka akan diperoleh

$$(\mathbf{x}_u): \quad (\Gamma_{uu}^u)_v + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^u - \ell c = (\Gamma_{uv}^u)_u + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^u - m a$$

$$(\mathbf{x}_v): \quad (\Gamma_{uu}^v)_v + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^v + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^v - \ell d = (\Gamma_{uv}^v)_u + \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^v - m b$$

$$(\mathbf{n}): \quad \ell_v + m \Gamma_{uu}^u + n \Gamma_{uu}^v = m_u + \ell \Gamma_{uv}^u + m \Gamma_{uv}^v.$$



Memanfaatkan Kesamaan Turunan ke Tiga

- ➊ Selanjutnya, dengan mencari $x_{uv} = x_{vuv}$ dan menggunakan ke bebas linearan x_u, x_v dan n , maka akan diperoleh

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}_u): \quad & (\Gamma_{uv}^u)_v + \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uv}^u + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{vv}^u - mc = (\Gamma_{vv}^u)_u + \Gamma_{vv}^u \Gamma_{uu}^u + \Gamma_{vv}^v \Gamma_{uv}^u - na \\(\mathbf{x}_v): \quad & (\Gamma_{uv}^v)_v + \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uv}^v - md = (\Gamma_{vv}^v)_u + \Gamma_{vv}^u \Gamma_{uu}^v - nb \\(\mathbf{n}): \quad & m_v + m \Gamma_{uv}^u + n \Gamma_{uv}^v = n_u + \ell \Gamma_{vv}^u + m \Gamma_{vv}^v.\end{aligned}$$



Khususnya dari dua persamaan n

1 Persamaan Codazzi

Codazzi equations

$$\begin{aligned}\ell_v - m_u &= \ell \Gamma_{uv}^u + m(\Gamma_{uv}^v - \Gamma_{uu}^u) - n \Gamma_{uu}^v \\ m_v - n_u &= \ell \Gamma_{vv}^u + m(\Gamma_{vv}^v - \Gamma_{uv}^u) - n \Gamma_{uv}^v.\end{aligned}$$



Selanjutnya, kita mempunyai persamaan Gauss

Gauss equations

$$EK = (\Gamma_{uu}^v)_v - (\Gamma_{uv}^v)_u + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^v + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^v - \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v - (\Gamma_{uv}^v)^2$$

$$FK = (\Gamma_{uv}^u)_u - (\Gamma_{uu}^u)_v + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^u - \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^u$$

$$FK = (\Gamma_{uv}^v)_v - (\Gamma_{vv}^v)_u + \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uv}^v - \Gamma_{vv}^u \Gamma_{uu}^v$$

$$GK = (\Gamma_{vv}^u)_u - (\Gamma_{uv}^u)_v + \Gamma_{vv}^u \Gamma_{uu}^u + \Gamma_{vv}^v \Gamma_{uv}^u - (\Gamma_{uv}^u)^2 - \Gamma_{uv}^v \Gamma_{vv}^u.$$



Kurvature Gauss untuk Koordinat Orthogonal

① Kita akan membuktikan (di latihan) bahwa

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right)$$

Theorem



Kurvature Gauss untuk Koordinat Orthogonal

- 1 Kita akan membuktikan (di latihan) bahwa

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right)$$

Theorem

- *Teorem Egregium Gauss*
Kelengkungan Gauss ditentukan hanya oleh bentuk dasar pertama saja.



Kurvature Gauss untuk Koordinat Orthogonal

- ❶ Kita akan membuktikan (di latihan) bahwa

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right)$$

Theorem

- *Teorem Egregium Gauss*
Kelengkungan Gauss ditentukan hanya oleh bentuk dasar pertama saja.
- *artinya nilai K dapat dihitung dari bentuk E, F, G dan turunan (parsial)nya.*



Kurvature Gauss untuk Koordinat Orthogonal

Corollary

- *Jika dua permukaan isometri secara lokal, kelengkungan Gauss sama pada titik yang berkaitan.*