



Permukaan

Pemetaan Gauss dan Bentuk Dasar Pertama

Wono Setya Budhi

Februari, 2014

KK Analisis Geometri, FMIPA-ITB



Pemetaan Gauss

- ① Misalkan M permukaan reguler, fungsi

$$\mathbf{n} : M \rightarrow \Sigma$$

$$P \mapsto \mathbf{n}(P)$$

dengan $\mathbf{n}(P)$ adalah vektor normal dari permukaan M , dan Σ adalah permukaan bola satuan.

Example



Pemetaan Gauss

- 1 Misalkan M permukaan reguler, fungsi

$$\mathbf{n} : M \rightarrow \Sigma$$

$$P \mapsto \mathbf{n}(P)$$

dengan $\mathbf{n}(P)$ adalah vektor normal dari permukaan M , dan Σ adalah permukaan bola satuan.

Example

- 1 Jika M bidang, maka $\mathbf{n}$ adalah konstan.



Pemetaan Gauss

- ① Misalkan M permukaan reguler, fungsi

$$\mathbf{n} : M \rightarrow \Sigma$$

$$P \mapsto \mathbf{n}(P)$$

dengan $\mathbf{n}(P)$ adalah vektor normal dari permukaan M , dan Σ adalah permukaan bola satuan.

Example

- ① Jika M bidang, maka $\mathbf{n}$ adalah konstan.
- ② Jika M merupakan selinder, maka hasil pemetaan itu adalah suatu ekuator.



Pemetaan Gauss

- ① Misalkan M permukaan reguler, fungsi

$$\mathbf{n} : M \rightarrow \Sigma$$

$$P \mapsto \mathbf{n}(P)$$

dengan $\mathbf{n}(P)$ adalah vektor normal dari permukaan M , dan Σ adalah permukaan bola satuan.

Example

- ① Jika M bidang, maka $\mathbf{n}$ adalah konstan.
- ② Jika M merupakan selinder, maka hasil pemetaan itu adalah suatu ekuator.
- ③ Jika M permukaan bola satuan, maka hasil pemetaan $\mathbf{n}$ adalah seluruh permukaan bola.



Pemetaan Gauss

Example

- Jika $z = x^2 - y^2$ atau $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$. Selanjutnya $\mathbf{x}_u = (1, 0, 2u)$ dan $\mathbf{x}_v = (0, 1, -2v)$



Pemetaan Gauss

Example

- Jika $z = x^2 - y^2$ atau $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$. Selanjutnya $\mathbf{x}_u = (1, 0, 2u)$ dan $\mathbf{x}_v = (0, 1, -2v)$
- Kemudian,

$$\mathbf{n} = \left(\frac{-2u}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}, \frac{2v}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \right)$$

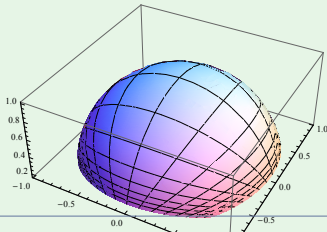


Pemetaan Gauss

Example

- Jika $z = x^2 - y^2$ atau $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$. Selanjutnya $\mathbf{x}_u = (1, 0, 2u)$ dan $\mathbf{x}_v = (0, 1, -2v)$
- Kemudian,

$$\mathbf{n} = \left(\frac{-2u}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}, \frac{2v}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}} \right)$$





Memahami Bentuk Permukaan

- ➊ Kita akan mempelajari bentuk dari permukaan



Memahami Bentuk Permukaan

- 1 Kita akan mempelajari bentuk dari permukaan
- 2 Khususnya kelengkungan?



Memahami Bentuk Permukaan

- 1 Kita akan mempelajari bentuk dari permukaan
- 2 Khususnya kelengkungan?
- 3 Tentu lebih rumit dibandingkan lengkungan.



Turunan Berarah

① Misalkan $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, tentu saja ini juga berlaku untuk $M = \mathbb{R}^2$



Turunan Berarah

- 1 Misalkan $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, tentu saja ini juga berlaku untuk $M = \mathbb{R}^2$
- 2 Kemudian, misalkan $\mathbf{V} \in T_p(M)$ vektor di bidang singgung.



Turunan Berarah

- 1 Misalkan $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, tentu saja ini juga berlaku untuk $M = \mathbb{R}^2$
- 2 Kemudian, misalkan $\mathbf{V} \in T_p(M)$ vektor di bidang singgung.
- 3 Turunan berarah fungsi f di P dengan arah $\mathbf{V}$ adalah

$$D_{\mathbf{V}}f(P) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\alpha(t))$$

dengan $\alpha(0) = P$ dan $\alpha'(0) = \mathbf{V}$



Turunan Berarah

- 1 Misalkan $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, tentu saja ini juga berlaku untuk $M = \mathbb{R}^2$
- 2 Kemudian, misalkan $\mathbf{V} \in T_P(M)$ vektor di bidang singgung.
- 3 Turunan berarah fungsi f di P dengan arah $\mathbf{V}$ adalah

$$D_{\mathbf{V}}f(P) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\alpha(t))$$

dengan $\alpha(0) = P$ dan $\alpha'(0) = \mathbf{V}$

- 4 Di $\mathbb{R}^2$, kita mengetahui bahwa

$$D_{\mathbf{V}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{V}$$



Kelengkungan Permukaan

- 1 Misalkan M permukaan dan $P \in M$. Misalkan pula $\mathbf{V} \in T_P M$ vektor satuan.



Kelengkungan Permukaan

- 1 Misalkan M permukaan dan $P \in M$. Misalkan pula $\mathbf{V} \in T_P M$ vektor satuan.
- 2 Kemudian, misalkan α adalah lengkungan hasil perpotongan antara permukaan M dan bidang yang dibangun oleh $\mathbf{V}$ dan $\mathbf{n}$.



Kelengkungan Permukaan

- 1 Misalkan M permukaan dan $P \in M$. Misalkan pula $\mathbf{V} \in T_P M$ vektor satuan.
- 2 Kemudian, misalkan α adalah lengkungan hasil perpotongan antara permukaan M dan bidang yang dibangun oleh $\mathbf{V}$ dan $\mathbf{n}$.
- 3 Misalkan pula α diparameterisasi dengan panjang lengkungan.



Kelengkungan Permukaan

- 1 Misalkan M permukaan dan $P \in M$. Misalkan pula $\mathbf{V} \in T_P M$ vektor satuan.
- 2 Kemudian, misalkan α adalah lengkungan hasil perpotongan antara permukaan M dan bidang yang dibangun oleh $\mathbf{V}$ dan $\mathbf{n}$.
- 3 Misalkan pula α diparameterisasi dengan panjang lengkungan.
- 4 Dalam hal ini $\alpha(0) = P$ dan $\alpha'(0) = \mathbf{V}$



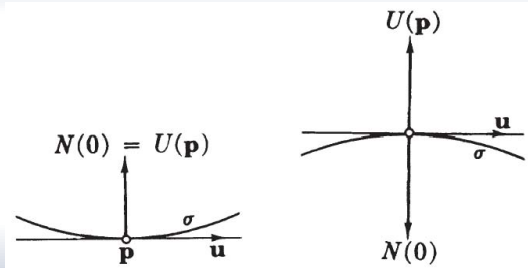
Kelengkungan Permukaan

- 1 Misalkan M permukaan dan $P \in M$. Misalkan pula $\mathbf{V} \in T_P M$ vektor satuan.
- 2 Kemudian, misalkan α adalah lengkungan hasil perpotongan antara permukaan M dan bidang yang dibangun oleh $\mathbf{V}$ dan $\mathbf{n}$.
- 3 Misalkan pula α diparameterisasi dengan panjang lengkungan.
- 4 Dalam hal ini $\alpha(0) = P$ dan $\alpha'(0) = \mathbf{V}$
- 5 Perhatikan bahwa normal utamanya tentu $\pm \mathbf{n}(P)$



Kelengkungan Permukaan

1





Kelengkungan Permukaan

- ① Dengan demikian kelengkungan $\kappa(P)$ dapat dihitung sebagai

$$\pm \kappa(P) = \kappa \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}'(0) \cdot \mathbf{n}(P)$$



Kelengkungan Permukaan

- 1 Dengan demikian kelengkungan $\kappa(P)$ dapat dihitung sebagai

$$\pm\kappa(P) = \kappa \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}'(0) \cdot \mathbf{n}(P)$$

- 2 Selanjutnya, karena $\mathbf{n}(\alpha(s)) \cdot \mathbf{T}(s) = 0$, maka
 $\mathbf{n}(P) \cdot \mathbf{T}'(0) + \mathbf{n}'(\alpha(0)) \cdot \mathbf{T}(0) = 0$, maka

$$\begin{aligned}\pm\kappa(P) &= -\mathbf{T}(0) \cdot \mathbf{n}'(\alpha(0)) \\ &= -\mathbf{V} \cdot D_{\mathbf{V}}\mathbf{n}(P) = -D_{\mathbf{V}}\mathbf{n}(P) \cdot \mathbf{V}\end{aligned}$$



Kelengkungan Permukaan

Theorem

① Untuk $\mathbf{V} \in T_P M$, turunan berarah $D_{\mathbf{V}} \mathbf{n}(P) \in T_P M$.



Kelengkungan Permukaan

Theorem

① Untuk $\mathbf{V} \in T_P M$, turunan berarah $D_{\mathbf{V}} \mathbf{n}(P) \in T_P M$.

② *Pemetaan*

$$S_P : T_P M \rightarrow T_P M$$

didefinisikan sebagai $S_P(\mathbf{V}) = -D_{\mathbf{V}} \mathbf{n}(P)$ merupakan pemetaan linear, dan



Kelengkungan Permukaan

Theorem

① Untuk $\mathbf{V} \in T_P M$, turunan berarah $D_{\mathbf{V}} \mathbf{n}(P) \in T_P M$.

② Pemetaan

$$S_P : T_P M \rightarrow T_P M$$

didefinisikan sebagai $S_P(\mathbf{V}) = -D_{\mathbf{V}} \mathbf{n}(P)$ merupakan pemetaan linear, dan

③ merupakan pemetaan simetri, yaitu untuk setiap $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in T_P M$ berlaku

$$S_P(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{U} \cdot S_P(\mathbf{V})$$



Kelengkungan Permukaan

Theorem

① Untuk $\mathbf{V} \in T_P M$, turunan berarah $D_{\mathbf{V}} \mathbf{n}(P) \in T_P M$.

② Pemetaan

$$S_P : T_P M \rightarrow T_P M$$

didefinisikan sebagai $S_P(\mathbf{V}) = -D_{\mathbf{V}} \mathbf{n}(P)$ merupakan pemetaan linear, dan

③ merupakan pemetaan simetri, yaitu untuk setiap $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in T_P M$ berlaku

$$S_P(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{U} \cdot S_P(\mathbf{V})$$

④ Pemetaan S disebut sebagai shape operators.



Kelengkungan Permukaan

Theorem

① Untuk $\mathbf{V} \in T_P M$, turunan berarah $D_{\mathbf{V}} \mathbf{n}(P) \in T_P M$.

Proof.



Kelengkungan Permukaan

Theorem

- 1 Untuk $\mathbf{V} \in T_P M$, turunan berarah $D_{\mathbf{V}} \mathbf{n}(P) \in T_P M$.

Proof.

- 1 Misalkan α lengkungan dengan $\alpha(0) = P$ dan $\alpha'(0) = \mathbf{V}$. Dalam hal ini $\mathbf{n} \circ \alpha(t) = \mathbf{n}(\alpha(t))$ merupakan vektor yang konstan.



Kelengkungan Permukaan

Theorem

- ① Untuk $\mathbf{V} \in T_P M$, turunan berarah $D_{\mathbf{V}} \mathbf{n}(P) \in T_P M$.

Proof.

- ① Misalkan α lengkungan dengan $\alpha(0) = P$ dan $\alpha'(0) = \mathbf{V}$. Dalam hal ini $\mathbf{n} \circ \alpha(t) = \mathbf{n}(\alpha(t))$ merupakan vektor yang konstan.
- ② Dengan demikian

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{V}} \mathbf{n}(P) \cdot \mathbf{n}(P) &= (\mathbf{n} \circ \alpha)'(0) \cdot (\mathbf{n} \circ \alpha)(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$



Kelengkungan Permukaan

Theorem

- 1 Untuk $\mathbf{V} \in T_P M$, turunan berarah $D_{\mathbf{V}} \mathbf{n}(P) \in T_P M$.

Proof.

- 1 Misalkan α lengkungan dengan $\alpha(0) = P$ dan $\alpha'(0) = \mathbf{V}$. Dalam hal ini $\mathbf{n} \circ \alpha(t) = \mathbf{n}(\alpha(t))$ merupakan vektor yang konstan.
- 2 Dengan demikian

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{V}} \mathbf{n}(P) \cdot \mathbf{n}(P) &= (\mathbf{n} \circ \alpha)'(0) \cdot (\mathbf{n} \circ \alpha)(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$



Kelengkungan Permukaan

Theorem

① *Pemetaan*

$$S_P : T_P M \rightarrow T_P M$$

didefinisikan sebagai $S_P(\mathbf{V}) = -D_{\mathbf{V}}\mathbf{n}(P)$ merupakan pemetaan linear, dan

Proof.





Kelengkungan Permukaan

Theorem

1 Pemetaan

$$S_P : T_P M \rightarrow T_P M$$

didefinisikan sebagai $S_P(\mathbf{V}) = -D_{\mathbf{V}}\mathbf{n}(P)$ merupakan pemetaan linear, dan

Proof.

1 Sifat linear muncul karena turunan bersifat linear.





Kelengkungan Permukaan

Theorem

- ① merupakan pemetaan simetri, yaitu untuk setiap $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in T_P M$ berlaku $S_P(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{U} \cdot S_P(\mathbf{V})$

Proof.



Kelengkungan Permukaan

Theorem

- 1 merupakan pemetaan simetri, yaitu untuk setiap $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in T_P M$ berlaku $S_P(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{U} \cdot S_P(\mathbf{V})$

Proof.

- 1 Pertama, kita menggunakan kurva koordinat yaitu u, v



Kelengkungan Permukaan

Theorem

- 1 merupakan pemetaan simetri, yaitu untuk setiap $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in T_P M$ berlaku $S_P(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{U} \cdot S_P(\mathbf{V})$

Proof.

- 1 Pertama, kita menggunakan kurva koordinat yaitu u, v
- 2 Khususnya, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v = 0$, maka $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v)_u = 0$ dan $\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{vu} = 0$. Perhatikan bahwa $\mathbf{x}_u = -D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n}$. Jadi

$$\begin{aligned} S_P(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_v &= -D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n}(P) \cdot \mathbf{x}_v \\ &= -\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{vu} \end{aligned}$$



Kelengkungan Permukaan

Proof.

- ① Khususnya, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v = 0$, maka $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v)_u = 0$ dan $\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{vu} = 0$. Perhatikan bahwa $\mathbf{x}_u = -D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n}$. Jadi

$$\begin{aligned} S_P(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_v &= -D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n}(P) \cdot \mathbf{x}_v \\ &= -\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{vu} \end{aligned}$$



Kelengkungan Permukaan

Proof.

- ① Khususnya, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v = 0$, maka $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v)_u = 0$ dan $\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{vu} = 0$. Perhatikan bahwa $\mathbf{x}_u = -D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n}$. Jadi

$$\begin{aligned} S_P(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_v &= -D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n}(P) \cdot \mathbf{x}_v \\ &= -\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{vu} \end{aligned}$$

- ② Serupa dengan di atas

$$\begin{aligned} S_P(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_u &= -D_{\mathbf{x}_v} \mathbf{n}(P) \cdot \mathbf{x}_u \\ &= -\mathbf{n}_v \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{uv} \end{aligned}$$



Kelengkungan Permukaan

Proof.

- ① Khususnya, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v = 0$, maka $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v)_u = 0$ dan $\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{vu} = 0$. Perhatikan bahwa $\mathbf{x}_u = -D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n}$. Jadi

$$\begin{aligned} S_P(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_v &= -D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n}(P) \cdot \mathbf{x}_v \\ &= -\mathbf{n}_u \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{vu} \end{aligned}$$

- ② Serupa dengan di atas

$$\begin{aligned} S_P(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_u &= -D_{\mathbf{x}_v} \mathbf{n}(P) \cdot \mathbf{x}_u \\ &= -\mathbf{n}_v \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{uv} \end{aligned}$$

- ③ Jika fungsi $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^2$, maka keduanya sama.



Kelengkungan Permukaan

Proof.

- ① Setelah basis berlaku, misalkan $\mathbf{U} = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v$ dan $\mathbf{V} = c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v$, maka

$$\begin{aligned} S_P(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{V} &= (aS_P(\mathbf{x}_u) + bS_P(\mathbf{x}_v)) \cdot (c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v) \\ &= acS_P(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_v + \dots \\ &= ac\mathbf{x}_u \cdot S_P(\mathbf{x}_v) \end{aligned}$$





Kelengkungan Permukaan

Proof.

- ① Setelah basis berlaku, misalkan $\mathbf{U} = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v$ dan $\mathbf{V} = c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v$, maka

$$\begin{aligned} S_P(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{V} &= (aS_P(\mathbf{x}_u) + bS_P(\mathbf{x}_v)) \cdot (c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v) \\ &= acS_P(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_v + \dots \\ &= ac\mathbf{x}_u \cdot S_P(\mathbf{x}_v) \end{aligned}$$

- ② Terakhir, itu sama dengan $\mathbf{U} \cdot S_P(\mathbf{V})$.





Kelengkungan Permukaan

Example

- 1 Jika $S_P = 0$, maka M merupakan bidang.



Kelengkungan Permukaan

Example

- 1 Jika $S_P = 0$, maka M merupakan bidang.
- 2 Jika M merupakan bola, maka $S_P = -\frac{1}{a}I_P$



Mencari Matriks Penyajian Operator S

- 1 Misalkan $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ merupakan transformasi linear, dan mempunyai basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.



Mencari Matriks Penyajian Operator S

- 1 Misalkan $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ merupakan transformasi linear, dan mempunyai basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.
- 2 Matriks transformasi dicari dari

$$T(\mathbf{e}_1) = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$$

$$T(\mathbf{e}_2) = c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2$$

maka matriks penyajian $[T] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$



Mencari Matriks Penyajian Operator S

- 1 Misalkan $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ merupakan transformasi linear, dan mempunyai basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.
- 2 Matriks transformasi dicari dari

$$T(\mathbf{e}_1) = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$$

$$T(\mathbf{e}_2) = c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2$$

maka matriks penyajian $[T] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

- 3 Dengan $a = T(\mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1$ dan $b = T(\mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_2$ jika $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ basis orthonormal.



Mencari Matriks Penyajian Operator S

- 1 Misalkan $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ merupakan transformasi linear, dan mempunyai basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.
- 2 Matriks transformasi dicari dari

$$T(\mathbf{e}_1) = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$$

$$T(\mathbf{e}_2) = c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2$$

maka matriks penyajian $[T] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

- 3 Dengan $a = T(\mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1$ dan $b = T(\mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_2$ jika $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ basis orthonormal.
- 4 Untuk Operator S_P , kita akan mendefinisikan
$$I_P(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = S_P(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{V}$$



Mencari Matriks Penyajian Operator S

- 1 Untuk Operator S_P , kita akan mendefinisikan
$$I|_P(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = S_P(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{V}$$



Mencari Matriks Penyajian Operator S

- 1 Untuk Operator S_P , kita akan mendefinisikan

$$I_P(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = S_P(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{V}$$

- 2 Jika

$$\begin{aligned} I_P(\mathbf{V}, \mathbf{V}) &= S_P(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} \\ &= -D_{\mathbf{V}}\mathbf{n}(P) \cdot \mathbf{V} \\ &= -(\mathbf{n} \circ \alpha)'(0) \cdot \mathbf{T}(0) \\ &= (\mathbf{n} \circ \alpha)(0) \cdot \mathbf{T}'(0) \\ &= \mathbf{n}(P) \cdot \kappa \mathbf{N} = \pm \kappa \end{aligned}$$



Mencari Matriks Penyajian Operator S

- 1 Untuk Operator S_P , kita akan mendefinisikan
$$I|_P(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = S_P(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{V}$$



Mencari Matriks Penyajian Operator S

- 1 Untuk Operator S_P , kita akan mendefinisikan

$$I_P(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = S_P(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{V}$$

- 2 Jika

$$\begin{aligned} I_P(\mathbf{V}, \mathbf{V}) &= S_P(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{V} \\ &= -D_{\mathbf{V}}\mathbf{n}(P) \cdot \mathbf{V} \\ &= -(\mathbf{n} \circ \alpha)'(0) \cdot \mathbf{T}(0) \\ &= (\mathbf{n} \circ \alpha)(0) \cdot \mathbf{T}'(0) \\ &= \mathbf{n}(P) \cdot \kappa \mathbf{N} = \pm \kappa \end{aligned}$$



Mencari Matriks Penyajian Operator S

1 Misalkan matriksnya $\begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix}$, maka

$$l = l_P(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u) = -D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{n}$$

$$m = l_P(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = -D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n}$$

$$m = l_P(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = -D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n}$$



Mencari Matriks Penyajian Operator S

- 1 Misalkan matriksnya $\begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix}$, maka

$$l = l_P(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u) = -D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{n}$$

$$m = l_P(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = -D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n}$$

$$m = l_P(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = -D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n}$$

- 2 Selanjutnya, jika diketahui matriks di atas, maka $\mathbf{U} = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v$ dan $\mathbf{V} = c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v$, maka

$$\begin{aligned} l_P(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= l_P(a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v, c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v) \\ &= ac l_P(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u) + (ad + bc) l_P(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) + bd l_P(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v) \end{aligned}$$

jika $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ orthonormal!



Mencari Matriks Penyajian Operator S

- 1 Misalkan matriksnya $\begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix}$, maka

$$l = l_P(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u) = -D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{n}$$

$$m = l_P(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = -D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n}$$

$$m = l_P(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = -D_{\mathbf{x}_u} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n}$$

- 2 Selanjutnya, jika diketahui matriks di atas, maka $\mathbf{U} = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v$ dan $\mathbf{V} = c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v$, maka

$$\begin{aligned} l_P(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= l_P(a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v, c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v) \\ &= ac l_P(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u) + (ad + bc) l_P(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) + bd l_P(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v) \end{aligned}$$

jika $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ orthonormal!

- 3 Bagaimana jika tidak orthonormal?



Nilai Eigen dan Vektor Eigen dari S

Definition

- Karena S merupakan operator simetri, maka S akan mempunyai dua nilai eigen real, dan disebut sebagai kelengkungan utama (*principal curvatures*) dari M di titik P .



Nilai Eigen dan Vektor Eigen dari S

Definition

- Karena S merupakan operator simetri, maka S akan mempunyai dua nilai eigen real, dan disebut sebagai kelengkungan utama (*principal curvatures*) dari M di titik P .
- Vektor eigen yang berkaitan disebut arah utama (*principal directions*)



Nilai Eigen dan Vektor Eigen dari S

Definition

- Karena S merupakan operator simetri, maka S akan mempunyai dua nilai eigen real, dan disebut sebagai kelengkungan utama (*principal curvatures*) dari M di titik P .
- Vektor eigen yang berkaitan disebut arah utama (*principal directions*)
- Suatu garis disebut garis kelengkungan jika vektor singgungnya pada setiap titik adalah mempunyai arah utama.



Nilai Eigen dan Vektor Eigen dari S

Theorem

- Misalkan $\mathbf{e}_1$ dan $\mathbf{e}_2$ vektor satuan sebagai arah utama (vektor eigen) dan k_1 dan k_2 kelengkungan utama (nilai eigen). Perhatikan $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ saling tegak lurus.

Proof.



Nilai Eigen dan Vektor Eigen dari S

Theorem

- Misalkan $\mathbf{e}_1$ dan $\mathbf{e}_2$ vektor satuan sebagai arah utama (vektor eigen) dan k_1 dan k_2 kelengkungan utama (nilai eigen). Perhatikan $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ saling tegak lurus.
- Misalkan $\mathbf{V} = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$ untuk $\theta \in [0, 2\pi)$, maka

$$IIP(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$$

Proof.



Nilai Eigen dan Vektor Eigen dari S

Theorem

- Misalkan $\mathbf{e}_1$ dan $\mathbf{e}_2$ vektor satuan sebagai arah utama (vektor eigen) dan k_1 dan k_2 kelengkungan utama (nilai eigen). Perhatikan $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ saling tegak lurus.
- Misalkan $\mathbf{V} = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$ untuk $\theta \in [0, 2\pi)$, maka

$$IIP(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$$

Proof.

- 1 Kita cukup menghitung

$$\begin{aligned} IIP(\mathbf{V}, \mathbf{V}) &= IIP(\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2, \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2) \\ &= IIP(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \cos^2 \theta + IIP(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) \sin^2 \theta \end{aligned}$$



Nilai Eigen dan Vektor Eigen dari S

① Jika $k_1 \geq k_2$, maka

$$k_2 \leq \text{IIP}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta \leq k_1$$



Nilai Eigen dan Vektor Eigen dari S

① Jika $k_1 \geq k_2$, maka

$$k_2 \leq \|\mathbf{V}\|_P^2 = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta \leq k_1$$

② Hal ini dapat dilihat sebagai berikut

$$\begin{aligned} k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta &= k_1 (1 - \sin^2 \theta) + k_2 \sin^2 \theta \\ &= k_1 + (k_2 - k_1) \sin^2 \theta \leq k_1 \end{aligned}$$



Nilai Eigen dan Vektor Eigen dari S

Definition

- 1 Hasil kali dari kelengkungan utama disebut kelengkungan Gauss
 $K = k_1 k_2$



Nilai Eigen dan Vektor Eigen dari S

Definition

- 1 Hasil kali dari kelengkungan utama disebut kelengkungan Gauss
 $K = k_1 k_2$
- 2 Rata-rata dari kelengkungan utama disebut kelengkungan rata-rata $H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2}$



Nilai Eigen dan Vektor Eigen dari S

Definition

- 1 Hasil kali dari kelengkungan utama disebut kelengkungan Gauss
 $K = k_1 k_2$
- 2 Rata-rata dari kelengkungan utama disebut kelengkungan rata-rata $H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1}{2}$
- 3 Suatu permukaan disebut permukaan minimal jika $H = 0$ dan disebut rata-rata $K = 0$.



Interpretasi dari Kelengkungan Gauss

① Misalkan $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dan $\omega \subset \mathbb{R}^2$, maka $S(\omega)$



Interpretasi dari Kelengkungan Gauss

- 1 Misalkan $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dan $\omega \subset \mathbb{R}^2$, maka $S(\omega)$
- 2 Ukuran luas

$$\begin{aligned}\text{Luas } S(\omega) &= \det[S] \text{ Luas } \omega \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \text{ Luas } \omega\end{aligned}$$



Interpretasi dari Kelengkungan Gauss

- 1 Misalkan $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dan $\omega \subset \mathbb{R}^2$, maka $S(\omega)$
- 2 Ukuran luas

$$\begin{aligned}\text{Luas } S(\omega) &= \det[S] \text{ Luas } \omega \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \text{ Luas } \omega\end{aligned}$$

- 3 Jika perlu dilakukan ditambahkan nilai mutlak.



Interpretasi dari Kelengkungan Gauss

- 1 Misalkan $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dan $\omega \subset \mathbb{R}^2$, maka $S(\omega)$
- 2 Ukuran luas

$$\begin{aligned}\text{Luas } S(\omega) &= \det[S] \text{ Luas } \omega \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \text{ Luas } \omega\end{aligned}$$

- 3 Jika perlu dilakukan ditambahkan nilai mutlak.
- 4 Untuk shape operator, maka $S(\omega) \subset S^2$ bola satuan.