



Permukaan

Parameterisasi dan Bentuk Dasar Pertama

Wono Setya Budhi

Januari, 2014

KK Analisis Geometri, FMIPA-ITB



Parameterisasi Permukaan: Selinder

- 1 Kita dapat memandang selinder sebagai susunan lengkungan lingkaran,

$$\mathbf{x}(u, v_0) = (\cos u, \sin u, v_0)$$

lingkaran pada tinggi $z = v_0$



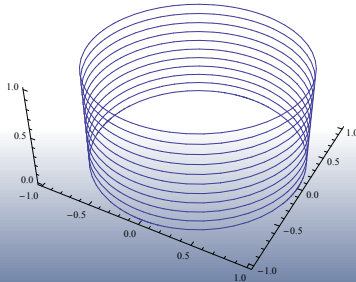
Parameterisasi Permukaan: Selinder

- 1 Kita dapat memandang selinder sebagai susunan lengkungan lingkaran,

$$\mathbf{x}(u, v_0) = (\cos u, \sin u, v_0)$$

lingkaran pada tinggi $z = v_0$

- 2





Parameterisasi Permukaan: Selinder

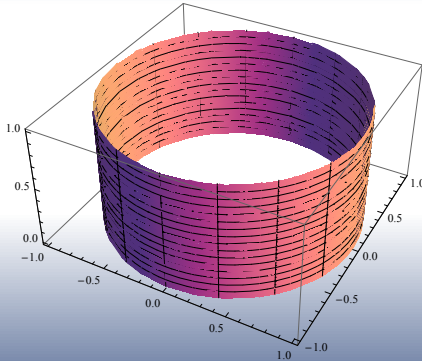
- 1 Kita dapat memandang selinder sebagai susunan lengkungan lingkaran $x(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$



Parameterisasi Permukaan: Selinder

- 1 Kita dapat memandang selinder sebagai susunan lengkungan lingkaran $x(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$

2





Parameterisasi Permukaan: Selinder

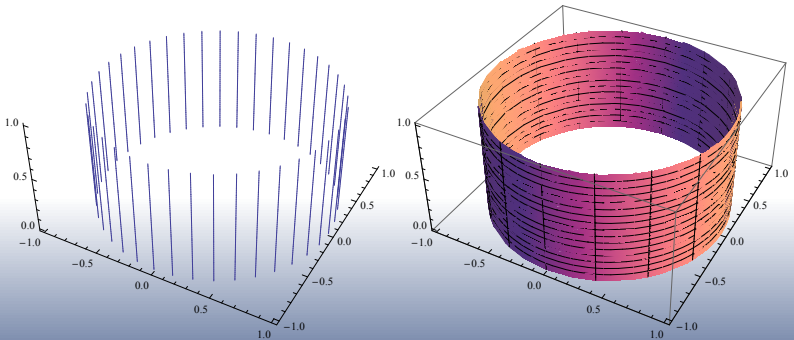
- 1 Kita dapat memandang selinder sebagai susunan garis-garis tegak
 $x(u_0, v) = (\cos u_0, \sin u_0, v)$



Parameterisasi Permukaan: Selinder

- 1 Kita dapat memandang selinder sebagai susunan garis-garis tegak
 $x(u_0, v) = (\cos u_0, \sin u_0, v)$

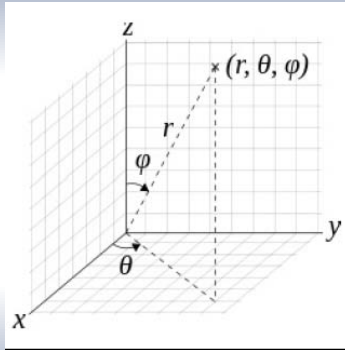
2





Parameterisasi Permukaan: Bola

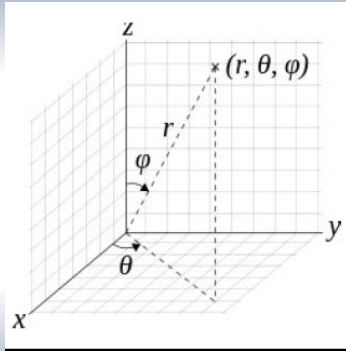
1 Koordinat bola





Parameterisasi Permukaan: Bola

1 Koordinat bola



2

$$x = r \cos \theta \sin \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \varphi$$



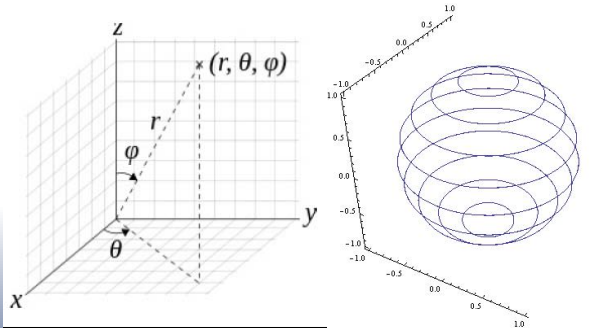
Parameterisasi Permukaan: Bola

① Koordinat bola $x = r \cos \theta \sin \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \varphi$



Parameterisasi Permukaan: Bola

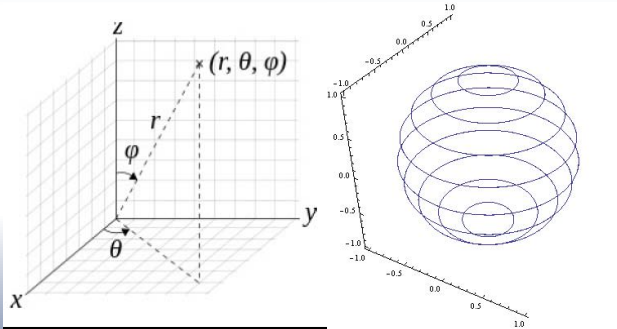
- 1 Koordinat bola $x = r \cos \theta \sin \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \varphi$
- 2 $\mathbf{x}(\theta, \varphi_0) = (r \cos \theta \sin \varphi_0, r \sin \theta \sin \varphi_0, z = r \cos \varphi_0)$





Parameterisasi Permukaan: Bola

- 1 Koordinat bola $x = r \cos \theta \sin \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \varphi$
dengan $0 \leq \theta \leq 2\pi$ dan $0 \leq \varphi \leq \pi$





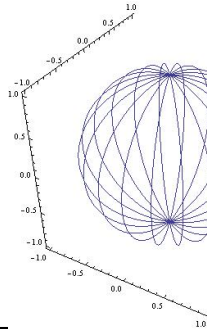
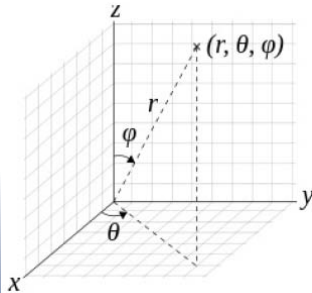
Parameterisasi Permukaan: Bola

- 1 Koordinat bola $x = r \cos \theta \sin \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \varphi$
dengan $0 \leq \theta \leq 2\pi$ dan $0 \leq \varphi \leq \pi$



Parameterisasi Permukaan: Bola

- 1 Koordinat bola $x = r \cos \theta \sin \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \varphi$ dengan $0 \leq \theta \leq 2\pi$ dan $0 \leq \varphi \leq \pi$
- 2 $\mathbf{x}(\theta_0, \varphi) = (r \cos \theta_0 \sin \varphi, r \sin \theta_0 \sin \varphi, r \cos \varphi)$





Parameterisasi Permukaan

Definition

- Misalkan diketahui pemetaan regular

$$\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$$

satu satu dan $\mathcal{C}^3$ dengan $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$ di himpunan buka U .



Parameterisasi Permukaan

Definition

- Misalkan diketahui pemetaan regular

$$\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$$

satu satu dan $\mathcal{C}^3$ dengan $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$ di himpunan buka U .

- Himpunan terhubung M disebut permukaan jika setiap titiknya mempunyai lingkungan yang diparameterkan secara regular.



Parameterisasi Permukaan

Definition

- Misalkan diketahui pemetaan regular

$$\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$$

satu satu dan $\mathcal{C}^3$ dengan $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$ di himpunan buka U .

- Himpunan terhubung M disebut permukaan jika setiap titiknya mempunyai lingkungan yang diparameterkan secara regular.

- 1 Perhatikan bahwa $\mathbf{x}(u, v) \in \mathbb{R}^3$ dan $\mathbf{x}_u$ turunan $\mathbf{x}$ terhadap u dan $\mathbf{x}_v$ turunan ...



Parameterisasi Permukaan

Definition

- Misalkan diketahui pemetaan regular

$$\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$$

satu satu dan $\mathcal{C}^3$ dengan $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$ di himpunan buka U .

- Himpunan terhubung M disebut permukaan jika setiap titiknya mempunyai lingkungan yang diparameterkan secara regular.

- 1 Perhatikan bahwa $\mathbf{x}(u, v) \in \mathbb{R}^3$ dan $\mathbf{x}_u$ turunan $\mathbf{x}$ terhadap u dan $\mathbf{x}_v$ turunan ...
- 2 Jika $v = v_0$ konstan, maka $\mathbf{x}(u, v_0)$ disebut lengkungan u .



Parameterisasi Permukaan

Definition

- Misalkan diketahui pemetaan regular

$$\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$$

satu satu dan $\mathcal{C}^3$ dengan $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$ di himpunan buka U .

- Himpunan terhubung M disebut permukaan jika setiap titiknya mempunyai lingkungan yang diparameterkan secara regular.

- 1 Perhatikan bahwa $\mathbf{x}(u, v) \in \mathbb{R}^3$ dan $\mathbf{x}_u$ turunan $\mathbf{x}$ terhadap u dan $\mathbf{x}_v$ turunan ...
- 2 Jika $v = v_0$ konstan, maka $\mathbf{x}(u, v_0)$ disebut lengkungan u .
- 3 Jika $u = u_0$ konstan, maka ...



Parameterisasi Permukaan

- 1 Perhatikan bahwa $\mathbf{x}(u, v) \in \mathbb{R}^3$ dan $\mathbf{x}_u$ turunan $\mathbf{x}$ terhadap u dan $\mathbf{x}_v$ turunan ...



Parameterisasi Permukaan

- 1 Perhatikan bahwa $\mathbf{x}(u, v) \in \mathbb{R}^3$ dan $\mathbf{x}_u$ turunan $\mathbf{x}$ terhadap u dan $\mathbf{x}_v$ turunan ...
- 2 Dalam hal ini $\mathbf{x}_u$ adalah vektor singgung terhadap lengkungan v



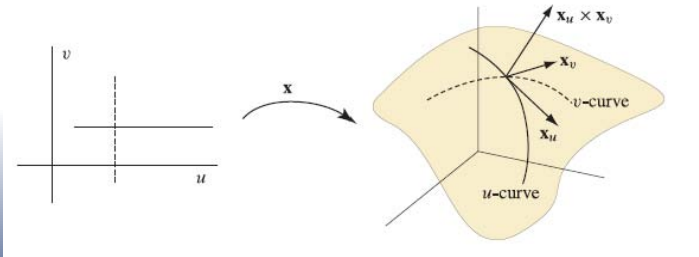
Parameterisasi Permukaan

- 1 Perhatikan bahwa $\mathbf{x}(u, v) \in \mathbb{R}^3$ dan $\mathbf{x}_u$ turunan $\mathbf{x}$ terhadap u dan $\mathbf{x}_v$ turunan ...
- 2 Dalam hal ini $\mathbf{x}_u$ adalah vektor singgung terhadap lengkungan v
- 3 Sedangkan $\mathbf{x}_v$ adalah ...



Parameterisasi Permukaan

- 1 Perhatikan bahwa $\mathbf{x}(u, v) \in \mathbb{R}^3$ dan $\mathbf{x}_u$ turunan $\mathbf{x}$ terhadap u dan $\mathbf{x}_v$ turunan ...
- 2 Dalam hal ini $\mathbf{x}_u$ adalah vektor singgung terhadap lengkungan v
- 3 Sedangkan $\mathbf{x}_v$ adalah ...
- 4





Parameterisasi Permukaan : Helix

- 1 Kita sudah mengenal helix $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, bt)$ sedangkan helicoid mempunyai persamaan

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv)$$

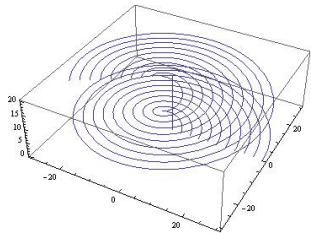
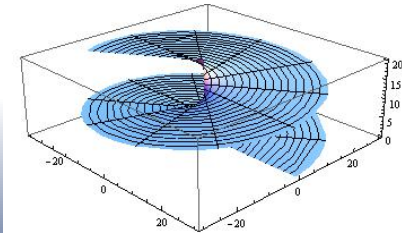


Parameterisasi Permukaan : Helix

- 1 Kita sudah mengenal helix $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, bt)$ sedangkan helicoid mempunyai persamaan

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv)$$

- 2 Lengkungan v yaitu $\mathbf{x}(u_0, v)$





Parameterisasi Permukaan : Helix

- 1 Kita sudah mengenal helix $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, bt)$ sedangkan helicoid mempunyai persamaan

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv)$$

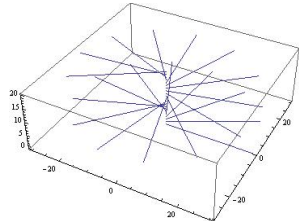
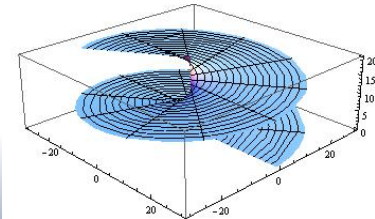


Parameterisasi Permukaan : Helix

- 1 Kita sudah mengenal helix $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, bt)$ sedangkan helicoid mempunyai persamaan

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv)$$

- 2 Lengkungan u yaitu $\mathbf{x}(u, v_0)$



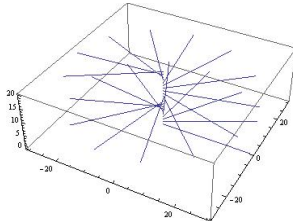
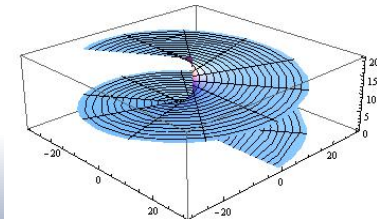


Parameterisasi Permukaan : Helix

- 1 Kita sudah mengenal helix $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, bt)$ sedangkan helicoid mempunyai persamaan

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv)$$

- 2 Lengkungan u yaitu $\mathbf{x}(u, v_0)$

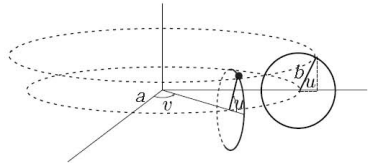
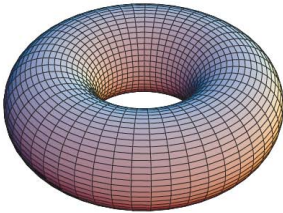


- 3 Ujilah bahwa $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$.



Parameterisasi Permukaan : Torus

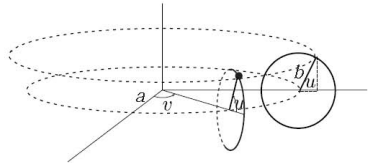
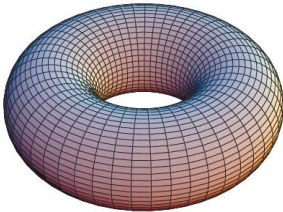
1





Parameterisasi Permukaan : Torus

1



2

$$\mathbf{x}(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$$

dengan $0 \leq u, v \leq 2\pi$.



Parameterisasi Permukaan : Torus

1

$$\mathbf{x}(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$$

dengan $0 \leq u, v \leq 2\pi$.

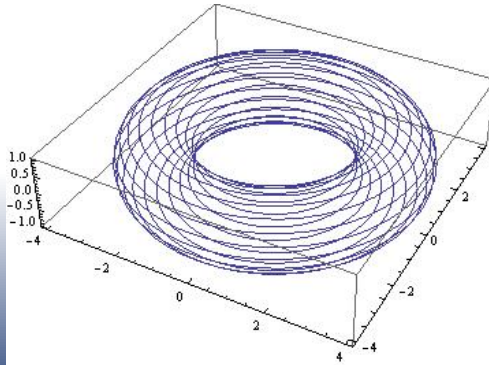


Parameterisasi Permukaan : Torus

1

$\mathbf{x}(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$
dengan $0 \leq u, v \leq 2\pi$.

2 Lengkungan v





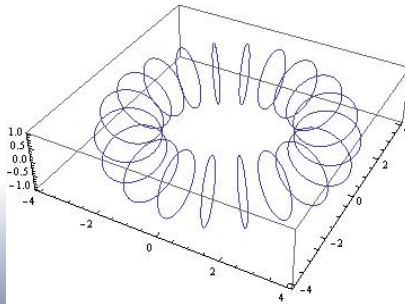
Parameterisasi Permukaan : Torus

- ① $\mathbf{x}(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$ dengan $0 \leq u, v \leq 2\pi$.



Parameterisasi Permukaan : Torus

- 1 $\mathbf{x}(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$ dengan $0 \leq u, v \leq 2\pi$.
- 2 Lengkungan u





Parameterisasi Permukaan : Benda Putar

- 1 Misalkan $\alpha(u) = (0, f(u), g(u))$, $u \in I$, lengkungan di bidang yz dengan $f(u) > 0$, diputar terhadap sumbu z



Parameterisasi Permukaan : Benda Putar

- 1 Misalkan $\alpha(u) = (0, f(u), g(u))$, $u \in I$, lengkungan di bidang yz dengan $f(u) > 0$, diputar terhadap sumbu z
- 2 Parameternya

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

dengan $0 \leq v \leq 2\pi, u \in I$.



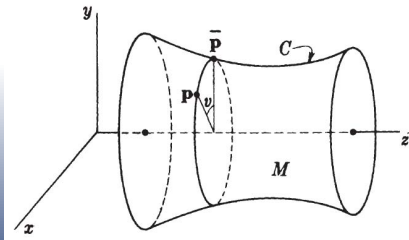
Parameterisasi Permukaan : Benda Putar

- 1 Misalkan $\alpha(u) = (0, f(u), g(u))$, $u \in I$, lengkungan di bidang yz dengan $f(u) > 0$, diputar terhadap sumbu z
- 2 Parameternya

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

dengan $0 \leq v \leq 2\pi$, $u \in I$.

3





Parameterisasi Permukaan : Benda Putar

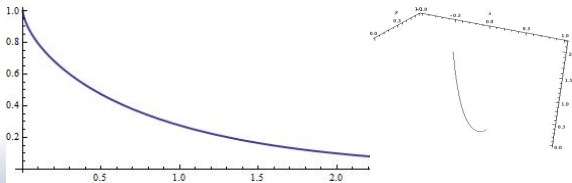
- 1 Misalkan $\alpha(u) = (0, \sin u, \cos u + \ln \tan \frac{u}{2})$, $u \in I$, lengkungan di bidang yz dengan $\frac{\pi}{2} \leq u < \pi$



Parameterisasi Permukaan : Benda Putar

- 1 Misalkan $\alpha(u) = (0, \sin u, \cos u + \ln \tan \frac{u}{2})$, $u \in I$, lengkungan di bidang yz dengan $\frac{\pi}{2} \leq u < \pi$

2





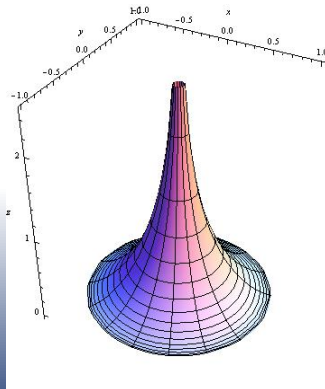
Parameterisasi Permukaan : Benda Putar

- 1 Misalkan $\alpha(u) = (0, \sin u, \cos u + \ln \tan \frac{u}{2})$, $u \in I$, lengkungan di bidang yz dengan $\frac{\pi}{2} \leq u < \pi$



Parameterisasi Permukaan : Benda Putar

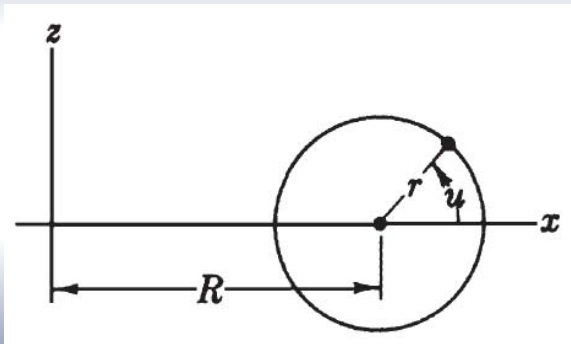
- 1 Misalkan $\alpha(u) = (0, \sin u, \cos u + \ln \tan \frac{u}{2})$, $u \in I$, lengkungan di bidang yz dengan $\frac{\pi}{2} \leq u < \pi$
- 2 $\mathbf{x}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u + \ln \tan \frac{u}{2})$





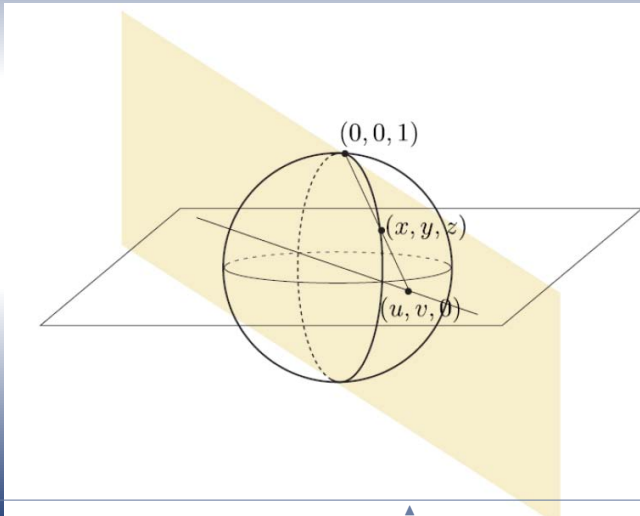
Parameterisasi Permukaan : Torus sebagai benda putar

1





Parameterisasi Permukaan : Bola, Stereoprojection





Parameterisasi Permukaan : Hasil Fungsi

- 1 Misalkan kita mempunyai fungsi dua variabel $f(x, y)$ dengan $(x, y) \in D_f$ dan permukaan

$$\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D_f\}$$



Parameterisasi Permukaan : Ruled Surface

① Misalkan α, β dua lengkungan dengan $\beta'(u) \neq 0$. Permukaan

$$\mathbf{x}(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$$



Parameterisasi Permukaan : Ruled Surface

- ① Misalkan α, β dua lengkungan dengan $\beta'(u) \neq 0$. Permukaan

$$\mathbf{x}(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$$

- ② Jika $\beta(u)$ konstan, maka hasilnya adalah selinder.



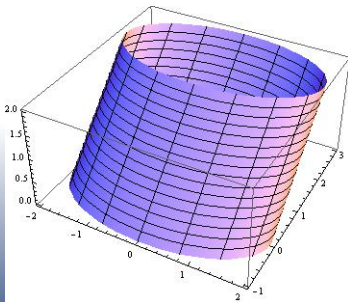
Parameterisasi Permukaan : Ruled Surface

- ❶ Misalkan α, β dua lengkungan dengan $\beta'(u) \neq 0$. Permukaan

$$\mathbf{x}(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$$

- ❷ Jika $\beta(u)$ konstan, maka hasilnya adalah selinder.

- ❸ Misalkan $\alpha(u) = (2 \cos u, \sin u, 0)$ dan $\beta(u) = (0, 1, 1)$





Parameterisasi Permukaan : Ruled Surface

① Misalkan α, β dua lengkungan dengan $\beta'(u) \neq 0$. Permukaan

$$\mathbf{x}(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$$



Parameterisasi Permukaan : Ruled Surface

- 1 Misalkan α, β dua lengkungan dengan $\beta'(u) \neq 0$. Permukaan

$$\mathbf{x}(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$$

- 2 Jika $\beta(u)$ konstan, maka hasilnya adalah selinder.



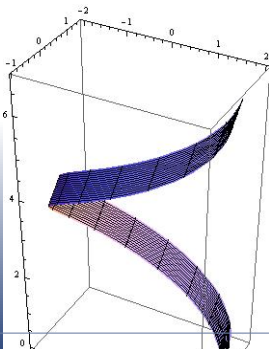
Parameterisasi Permukaan : Ruled Surface

- ❶ Misalkan α, β dua lengkungan dengan $\beta'(u) \neq 0$. Permukaan

$$\mathbf{x}(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$$

- ❷ Jika $\beta(u)$ konstan, maka hasilnya adalah selinder.

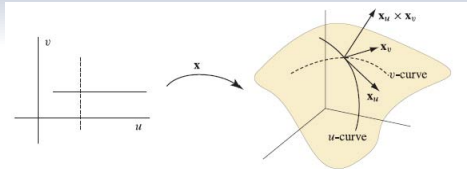
- ❸ Misalkan $\alpha(u) = (2 \cos u, \sin u, u)$ dan $\beta(u) = (0, 1, 1)$





Vektor Normal Permukaan

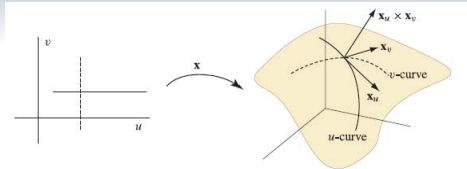
- 1 Misalkan $\mathbf{x}(u, v)$ suatu permukaan





Vektor Normal Permukaan

- 1 Misalkan $\mathbf{x}(u, v)$ suatu permukaan



- 2 Selanjutnya, vektor

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

merupakan vektor normal yang tegak lurus terhadap bidang singgung.



Hasil Kali Dalam pada Permukaan

- 1 Misalkan $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ lengkungan di bidang uv , maka $\beta(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ lengkungan pada permukaan.



Hasil Kali Dalam pada Permukaan

① Misalkan $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ lengkungan di bidang uv , maka $\beta(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ lengkungan pada permukaan.

② Panjang lengkungan di permukaan dapat dihitung sebagai $\int_a^b \|\beta'(t)\| dt$ dengan aturan rantai diperoleh

$$\beta'(t) = \mathbf{x}_u(u, v) u'(t) + \mathbf{x}_v(u, v) v'(t) = u'(t) \mathbf{x}_u + v'(t) \mathbf{x}_v$$

dan



Hasil Kali Dalam pada Permukaan

- 1 Misalkan $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ lengkungan di bidang uv , maka $\beta(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ lengkungan pada permukaan.

- 2 Panjang lengkungan di permukaan dapat dihitung sebagai $\int_a^b \|\beta'(t)\| dt$ dengan aturan rantai diperoleh

$$\beta'(t) = \mathbf{x}_u(u, v) u'(t) + \mathbf{x}_v(u, v) v'(t) = u'(t) \mathbf{x}_u + v'(t) \mathbf{x}_v$$

dan

3

$$\begin{aligned} \|\beta'(t)\|^2 &= \beta'(t) \cdot \beta'(t) \\ &= (u'(t) \mathbf{x}_u + v'(t) \mathbf{x}_v) \cdot (u'(t) \mathbf{x}_u + v'(t) \mathbf{x}_v) \\ &= u'(t)^2 \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + 2u'(t) v'(t) \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v + v'(t)^2 \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \end{aligned}$$



Hasil Kali Dalam pada Permukaan

1

$$\begin{aligned}\|\beta'(t)\|^2 &= \beta'(t) \cdot \beta'(t) \\ &= u'(t)^2 \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + 2u'(t)v'(t) \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v + v'(t)^2 \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v\end{aligned}$$



Hasil Kali Dalam pada Permukaan

1

$$\begin{aligned}\|\beta'(t)\|^2 &= \beta'(t) \cdot \beta'(t) \\ &= u'(t)^2 \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + 2u'(t)v'(t) \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v + v'(t)^2 \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v\end{aligned}$$

2 dan ditulis sebagai

$$\|\beta'(t)\|^2 = u'(t)^2 E + 2u'(t)v'(t) F + v'(t)^2 G$$

dengan

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$$



Hasil Kali Dalam pada Permukaan

1

$$\begin{aligned}\|\beta'(t)\|^2 &= \beta'(t) \cdot \beta'(t) \\ &= u'(t)^2 \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + 2u'(t) v'(t) \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v + v'(t)^2 \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v\end{aligned}$$

2 dan ditulis sebagai

$$\|\beta'(t)\|^2 = u'(t)^2 E + 2u'(t) v'(t) F + v'(t)^2 G$$

dengan

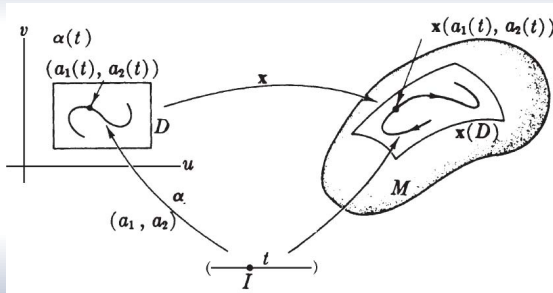
$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$$

3 Bentuk ini yang menghasilkan elemen panjang lengkungan pada permukaan.



Hasil Kali Dalam pada Permukaan

1





Hasil Kali Dalam pada Permukaan

- 1 Misalkan M suatu permukaan dan misalkan $\mathbf{U} = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v$ dan $\mathbf{V} = c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v$ adalah dua vektor di bidang singgung permukaan $T_P(M)$ di titik P .



Hasil Kali Dalam pada Permukaan

- 1 Misalkan M suatu permukaan dan misalkan $\mathbf{U} = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v$ dan $\mathbf{V} = c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v$ adalah dua vektor di bidang singgung permukaan $T_P(M)$ di titik P .
- 2 Bentuk dasar pertama

$$\begin{aligned} I_P(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} \\ &= (a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v) \cdot (c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v) \\ &= acE + (ad + bc)F + bdG \end{aligned}$$



Hasil Kali Dalam pada Permukaan

- 1 Misalkan M suatu permukaan dan misalkan $\mathbf{U} = a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v$ dan $\mathbf{V} = c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v$ adalah dua vektor di bidang singgung permukaan $T_P(M)$ di titik P .
- 2 Bentuk dasar pertama

$$\begin{aligned} I_P(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} \\ &= (a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v) \cdot (c\mathbf{x}_u + d\mathbf{x}_v) \\ &= acE + (ad + bc)F + bdG \end{aligned}$$

- 3 Dengan notasi aljabar linear

$$I_P(U, V) = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

akan menjadi hasil kali dalam di $T_P(M)$ jika matriks $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \dots$



Lokal Isometri

- 1 Misalkan M dan M^* dua permukaan. Disebut isometri lokal jika untuk setiap $P \in M$ jika ada parameterisasi $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ dengan $\mathbf{x}(u_0, v_0) = P$ dan parameterisasi $\mathbf{x}^* : U \rightarrow M^*$ dengan sifat $I_P = I_P^*$.



Lokal Isometri

- 1 Misalkan M dan M^* dua permukaan. Disebut isometri lokal jika untuk setiap $P \in M$ jika ada parameterisasi $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ dengan $\mathbf{x}(u_0, v_0) = P$ dan parameterisasi $\mathbf{x}^* : U \rightarrow M^*$ dengan sifat $I_P = I_P^*$.
- 2 Isometri lokal maka mengawetkan jarak.



Lokal Isometri

- 1 Misalkan M bagian dari kertas $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, 0)$ dan bagian dari $\mathbf{x}^*(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$



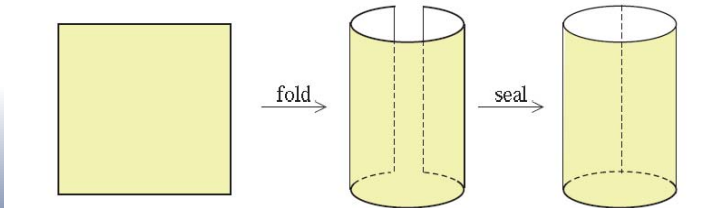
Lokal Isometri

- 1 Misalkan M bagian dari kertas $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, 0)$ dan bagian dari $\mathbf{x}^*(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$
- 2 Mudah dihitung bahwa $E = E^*$, $F = F^*$ dan $G = G^*$, maka $I_P = I_{P^*}$



Lokal Isometri

- 1 Misalkan M bagian dari kertas $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, 0)$ dan bagian dari $\mathbf{x}^*(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$
- 2 Mudah dihitung bahwa $E = E^*$, $F = F^*$ dan $G = G^*$, maka $I_P = I_{P^*}$
- 3 Lokal Isometri, tetapi bukan global





Luas di Permukaan

- ① Perhatikan bahwa matriks $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ dengan determinan
- $$EG - F^2 = \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|^2 > 0$$



Luas di Permukaan

- ① Perhatikan bahwa matriks $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ dengan determinan

$$EG - F^2 = \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|^2 > 0$$

- ② Dengan demikian luas

$$\int_U \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| \, dudv = \int_U \sqrt{EG - F^2} \, dudv$$