



Lengkungan

Teori Lokal

Wono Setya Budhi

Januari, 2014

KK Analisis Geometri, FMIPA-ITB



Teori Lokal,

Lemma

- ① Misalkan $\mathbf{f}, \mathbf{g} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dapat diturunkan dan $\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t) = \text{konstan}$ untuk setiap $t \in (a, b)$, maka

$$\mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{g}(t) = -\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}'(t)$$

untuk setiap $t \in (a, b)$



Teori Lokal,

Lemma

- ① Misalkan $\mathbf{f}, \mathbf{g} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dapat diturunkan dan $\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t) = \text{konstan}$ untuk setiap $t \in (a, b)$, maka

$$\mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{g}(t) = -\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}'(t)$$

untuk setiap $t \in (a, b)$

- ② Khususnya,

$$\|\mathbf{f}(t)\| = \text{const} \text{ jika dan hanya jika } \mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{f}(t) = 0$$



Teori Lokal,

Lemma

- ① Misalkan $\mathbf{f}, \mathbf{g} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dapat diturunkan dan $\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t) = \text{konstan}$ untuk setiap $t \in (a, b)$, maka

$$\mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{g}(t) = -\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}'(t)$$

untuk setiap $t \in (a, b)$

- ② Khususnya,

$$\|\mathbf{f}(t)\| = \text{const} \text{ jika dan hanya jika } \mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{f}(t) = 0$$

- ① Jika $\|\mathbf{f}(t)\| = \text{const}$, maka benda bergerak pada bola, maka kecepatan akan tegak lurus terhadap posisi.



Teori Lokal,

Lemma

- ① Misalkan $\mathbf{f}, \mathbf{g} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dapat diturunkan dan $\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t) = \text{konstan}$ untuk setiap $t \in (a, b)$, maka

$$\mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{g}(t) = -\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}'(t)$$

untuk setiap $t \in (a, b)$

- ② Khususnya,

$$\|\mathbf{f}(t)\| = \text{const} \text{ jika dan hanya jika } \mathbf{f}'(t) \cdot \mathbf{f}(t) = 0$$

- ① Jika $\|\mathbf{f}(t)\| = \text{const}$, maka benda bergerak pada bola, maka kecepatan akan tegak lurus terhadap posisi.

- ② Jadi secara intuitif jelas!



Teori Lokal

- 1 Misalkan kita mempunyai lengkungan α yang diparameterisasi oleh panjang lengkungan. Artinya $\|\alpha'(s)\| = 1$



Teori Lokal

- 1 Misalkan kita mempunyai lengkungan α yang diparameterisasi oleh panjang lengkungan. Artinya $\|\alpha'(s)\| = 1$
- 2 Misalkan $\mathbf{T}(s) = \alpha'(s)$, maka $\|\mathbf{T}(s)\| = 1$



Teori Lokal

- 1 Misalkan kita mempunyai lengkungan α yang diparameterisasi oleh panjang lengkungan. Artinya $\|\alpha'(s)\| = 1$
- 2 Misalkan $\mathbf{T}(s) = \alpha'(s)$, maka $\|\mathbf{T}(s)\| = 1$
- 3 Jadi $\mathbf{T}'(s)$ tegak lurus terhadap $\mathbf{T}(s)$.



Teori Lokal

- 1 Misalkan kita mempunyai lengkungan α yang diparameterisasi oleh panjang lengkungan. Artinya $\|\alpha'(s)\| = 1$
- 2 Misalkan $\mathbf{T}(s) = \alpha'(s)$, maka $\|\mathbf{T}(s)\| = 1$
- 3 Jadi $\mathbf{T}'(s)$ tegak lurus terhadap $\mathbf{T}(s)$.
- 4 Anggap $\mathbf{T}'(s) \neq 0$. Tuliskan $\mathbf{N}(s) = \frac{1}{\|\mathbf{T}'(s)\|} \mathbf{T}'(s)$ dan kita dapat menulis $\mathbf{T}'(s) = \kappa(s) \mathbf{N}(s)$, $\kappa(s)$ disebut curvature (kelengkungan).



Teori Lokal

- 1 Misalkan kita mempunyai lengkungan α yang diparameterisasi oleh panjang lengkungan. Artinya $\|\alpha'(s)\| = 1$
- 2 Misalkan $\mathbf{T}(s) = \alpha'(s)$, maka $\|\mathbf{T}(s)\| = 1$
- 3 Jadi $\mathbf{T}'(s)$ tegak lurus terhadap $\mathbf{T}(s)$.
- 4 Anggap $\mathbf{T}'(s) \neq 0$. Tuliskan $\mathbf{N}(s) = \frac{1}{\|\mathbf{T}'(s)\|} \mathbf{T}'(s)$ dan kita dapat menulis $\mathbf{T}'(s) = \kappa(s) \mathbf{N}(s)$, $\kappa(s)$ disebut curvature (kelengkungan).
- 5 Selanjutnya, definisikan

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$$



Teori Lokal

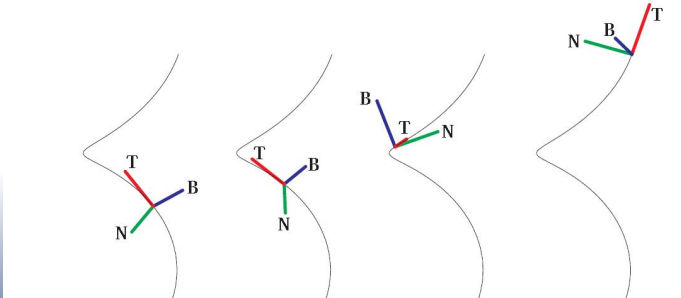
- 1 Sampai disini, kita mempunyai tiga vektor $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ yang saling tegak lurus.



Teori Lokal

- 1 Sampai disini, kita mempunyai tiga vektor $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ yang saling tegak lurus.

2





Teori Lokal

- ① Karena $\mathbf{N}(s)$ vektor normal, maka $\mathbf{N}'(s)$ tegak lurus terhadap $\mathbf{N}$.
Jadi

$$\mathbf{N}'(s) = a\mathbf{T}(s) + b\mathbf{B}(s)$$

dengan a, b konstanta.



Teori Lokal

- 1 Karena $\mathbf{N}(s)$ vektor normal, maka $\mathbf{N}'(s)$ tegak lurus terhadap $\mathbf{N}$.
Jadi

$$\mathbf{N}'(s) = a\mathbf{T}(s) + b\mathbf{B}(s)$$

dengan a, b konstanta.

- 2 Nilai

$$a = \mathbf{N}'(s) \cdot \mathbf{T}(s) = -\mathbf{N}(s) \cdot \mathbf{T}'(s) = -\mathbf{N}(s) \cdot (\kappa(s) \mathbf{N}(s)) = -\kappa(s)$$



Teori Lokal

- 1 Karena $\mathbf{N}(s)$ vektor normal, maka $\mathbf{N}'(s)$ tegak lurus terhadap $\mathbf{N}$.
Jadi

$$\mathbf{N}'(s) = a\mathbf{T}(s) + b\mathbf{B}(s)$$

dengan a, b konstanta.

- 2 Nilai

$$a = \mathbf{N}'(s) \cdot \mathbf{T}(s) = -\mathbf{N}(s) \cdot \mathbf{T}'(s) = -\mathbf{N}(s) \cdot (\kappa(s) \mathbf{N}(s)) = -\kappa(s)$$

- 3 dan

$$\begin{aligned} b &= \mathbf{N}'(s) \cdot \mathbf{B}(s) \\ &= \tau(s) \end{aligned}$$

yaitu proyeksi $\mathbf{N}'(s)$ terhadap $\mathbf{B}(s)$. Nilai ini disebut torsi, puntiran.



Teori Lokal

- ① Karena $\mathbf{B}(s)$ vektor normal, maka $\mathbf{B}'(s)$ tegak lurus terhadap $\mathbf{B}$.
Jadi

$$\mathbf{B}'(s) = a\mathbf{T}(s) + b\mathbf{N}(s)$$

dengan a, b konstanta.



Teori Lokal

- ① Karena $\mathbf{B}(s)$ vektor normal, maka $\mathbf{B}'(s)$ tegak lurus terhadap $\mathbf{B}$.
Jadi

$$\mathbf{B}'(s) = a\mathbf{T}(s) + b\mathbf{N}(s)$$

dengan a, b konstanta.

- ② Nilai

$$a = \mathbf{B}'(s) \cdot \mathbf{T}(s) = -\mathbf{B}(s) \cdot \mathbf{T}'(s) = -\mathbf{B}(s) \cdot (\kappa(s) \mathbf{N}(s)) = \dots$$



Teori Lokal

- 1 Karena $\mathbf{B}(s)$ vektor normal, maka $\mathbf{B}'(s)$ tegak lurus terhadap $\mathbf{B}$.
Jadi

$$\mathbf{B}'(s) = a\mathbf{T}(s) + b\mathbf{N}(s)$$

dengan a, b konstanta.

- 2 Nilai

$$a = \mathbf{B}'(s) \cdot \mathbf{T}(s) = -\mathbf{B}(s) \cdot \mathbf{T}'(s) = -\mathbf{B}(s) \cdot (\kappa(s) \mathbf{N}(s)) = \dots$$

- 3 dan

$$b = \mathbf{B}'(s) \cdot \mathbf{N}(s) = -\mathbf{B}(s) \cdot \mathbf{N}'(s) = -\tau(s)$$



Kesimpulan: Rumus Frenet

1

$$\begin{aligned}\mathbf{T}'(s) &= \kappa(s) \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{N}'(s) &= -\kappa(s) \mathbf{T}(s) + \tau(s) \mathbf{B}(s) \\ \mathbf{B}'(s) &= -\tau(s) \mathbf{N}(s)\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa bentuknya skew symmetric



Kesimpulan: Rumus Frenet

1

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'(s) &= \kappa(s) \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{N}'(s) &= -\kappa(s) \mathbf{T}(s) + \tau(s) \mathbf{B}(s) \\ \mathbf{B}'(s) &= -\tau(s) \mathbf{N}(s) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa bentuknya skew symmetric

2

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{T}'(s) & \mathbf{N}'(s) & \mathbf{B}'(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{T}(s) & \mathbf{N}(s) & \mathbf{B}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix}$$



Contoh

- 1 Misalkan kita mempunyai helix
 $\alpha(s) = \left(a \cos\left(\frac{1}{c}s\right), a \sin\left(\frac{1}{c}s\right), \frac{b}{c}s \right)$ dengan $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Carilah $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$, $\mathbf{B}(s)$!



Contoh

- 1 Misalkan kita mempunyai helix
 $\alpha(s) = \left(a \cos\left(\frac{1}{c}s\right), a \sin\left(\frac{1}{c}s\right), \frac{b}{c}s \right)$ dengan $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Carilah $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$, $\mathbf{B}(s)$!
- 2 Pertama, kita mencari $\alpha'(s) = \left(-\frac{a}{c} \sin\left(\frac{1}{c}s\right), \frac{a}{c} \cos\left(\frac{1}{c}s\right), \frac{b}{c} \right)$ dan
 $\|\alpha'(s)\| = \dots$



Contoh

- 1 Misalkan kita mempunyai helix
 $\alpha(s) = \left(a \cos\left(\frac{1}{c}s\right), a \sin\left(\frac{1}{c}s\right), \frac{b}{c}s \right)$ dengan $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Carilah $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$, $\mathbf{B}(s)$!
- 2 Pertama, kita mencari $\alpha'(s) = \left(-\frac{a}{c} \sin\left(\frac{1}{c}s\right), \frac{a}{c} \cos\left(\frac{1}{c}s\right), \frac{b}{c} \right)$ dan
 $\|\alpha'(s)\| = \dots$
- 3 Jadi $\mathbf{T}(s) = \frac{1}{c} \left(-a \sin\left(\frac{1}{c}s\right), a \cos\left(\frac{1}{c}s\right), b \right)$



Contoh

- 1 Misalkan kita mempunyai helix
 $\alpha(s) = \left(a \cos\left(\frac{1}{c}s\right), a \sin\left(\frac{1}{c}s\right), \frac{b}{c}s \right)$ dengan $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Carilah $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$, $\mathbf{B}(s)$!
- 2 Pertama, kita mencari $\alpha'(s) = \left(-\frac{a}{c} \sin\left(\frac{1}{c}s\right), \frac{a}{c} \cos\left(\frac{1}{c}s\right), \frac{b}{c} \right)$ dan
 $\|\alpha'(s)\| = \dots$
- 3 Jadi $\mathbf{T}(s) = \frac{1}{c} \left(-a \sin\left(\frac{1}{c}s\right), a \cos\left(\frac{1}{c}s\right), b \right)$
- 4 Kemudian, hitung $\mathbf{T}'(s) = \frac{1}{c} \left(-\frac{a}{c} \cos\left(\frac{1}{c}s\right), -\frac{a}{c} \sin\left(\frac{1}{c}s\right), 0 \right) =$
 $\frac{a}{c^2} \left(-\cos\left(\frac{s}{c}\right), -\sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right)$



Contoh

- 1 Misalkan kita mempunyai helix
 $\alpha(s) = \left(a \cos\left(\frac{1}{c}s\right), a \sin\left(\frac{1}{c}s\right), \frac{b}{c}s\right)$ dengan $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Carilah $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$, $\mathbf{B}(s)$!
- 2 Pertama, kita mencari $\alpha'(s) = \left(-\frac{a}{c} \sin\left(\frac{1}{c}s\right), \frac{a}{c} \cos\left(\frac{1}{c}s\right), \frac{b}{c}\right)$ dan
 $\|\alpha'(s)\| = \dots$
- 3 Jadi $\mathbf{T}(s) = \frac{1}{c} \left(-a \sin\left(\frac{1}{c}s\right), a \cos\left(\frac{1}{c}s\right), b\right)$
- 4 Kemudian, hitung $\mathbf{T}'(s) = \frac{1}{c} \left(-\frac{a}{c} \cos\left(\frac{1}{c}s\right), -\frac{a}{c} \sin\left(\frac{1}{c}s\right), 0\right) =$
 $\frac{a}{c^2} \left(-\cos\left(\frac{s}{c}\right), -\sin\left(\frac{s}{c}\right), 0\right)$
- 5 Jadi $\mathbf{N}(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{c}\right), -\sin\left(\frac{s}{c}\right), 0\right)$ dan $\kappa(s) = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}$



Contoh

- 1 Misalkan kita mempunyai helix
 $\alpha(s) = \left(a \cos\left(\frac{1}{c}s\right), a \sin\left(\frac{1}{c}s\right), \frac{b}{c}s \right)$ dengan $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Carilah $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$, $\mathbf{B}(s)$!
- 2 Pertama, kita mencari $\alpha'(s) = \left(-\frac{a}{c} \sin\left(\frac{1}{c}s\right), \frac{a}{c} \cos\left(\frac{1}{c}s\right), \frac{b}{c} \right)$ dan
 $\|\alpha'(s)\| = \dots$
- 3 Jadi $\mathbf{T}(s) = \frac{1}{c} \left(-a \sin\left(\frac{1}{c}s\right), a \cos\left(\frac{1}{c}s\right), b \right)$
- 4 Kemudian, hitung $\mathbf{T}'(s) = \frac{1}{c} \left(-\frac{a}{c} \cos\left(\frac{1}{c}s\right), -\frac{a}{c} \sin\left(\frac{1}{c}s\right), 0 \right) =$
 $\frac{a}{c^2} \left(-\cos\left(\frac{s}{c}\right), -\sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right)$
- 5 Jadi $\mathbf{N}(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{c}\right), -\sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right)$ dan $\kappa(s) = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}$
- 6 Terakhir $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) = \dots$



Contoh

- 1 Misalkan kita mempunyai helix
 $\alpha(s) = \left(a \cos\left(\frac{1}{c}s\right), a \sin\left(\frac{1}{c}s\right), \frac{b}{c}s \right)$ dengan $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Carilah $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$, $\mathbf{B}(s)$!
- 2 Pertama, kita mencari $\alpha'(s) = \left(-\frac{a}{c} \sin\left(\frac{1}{c}s\right), \frac{a}{c} \cos\left(\frac{1}{c}s\right), \frac{b}{c} \right)$ dan
 $\|\alpha'(s)\| = \dots$
- 3 Jadi $\mathbf{T}(s) = \frac{1}{c} \left(-a \sin\left(\frac{1}{c}s\right), a \cos\left(\frac{1}{c}s\right), b \right)$
- 4 Kemudian, hitung $\mathbf{T}'(s) = \frac{1}{c} \left(-\frac{a}{c} \cos\left(\frac{1}{c}s\right), -\frac{a}{c} \sin\left(\frac{1}{c}s\right), 0 \right) =$
 $\frac{a}{c^2} \left(-\cos\left(\frac{s}{c}\right), -\sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right)$
- 5 Jadi $\mathbf{N}(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{c}\right), -\sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right)$ dan $\kappa(s) = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}$
- 6 Terakhir $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) = \dots$
- 7 $\tau(s) = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2 + b^2}$



Interpretasi

- ① Kita mengetahui bahwa $\kappa(s) = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2+b^2}$ dan $\tau(s) = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2+b^2}$. Katakan $a > 0$ dan $b > 0$



Interpretasi

- 1 Kita mengetahui bahwa $\kappa(s) = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2+b^2}$ dan $\tau(s) = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2+b^2}$. Katakan $a > 0$ dan $b > 0$
- 2 Jika $b = 0$, maka persamaan helix memperlihatkan bahwa helix menjadi hanya lingkaran. Perhatikan $\tau = 0$.



Interpretasi

- 1 Kita mengetahui bahwa $\kappa(s) = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2+b^2}$ dan $\tau(s) = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2+b^2}$. Katakan $a > 0$ dan $b > 0$
- 2 Jika $b = 0$, maka persamaan helix memperlihatkan bahwa helix menjadi hanya lingkaran. Perhatikan $\tau = 0$.
- 3 Jika $b \rightarrow \infty$, apa bentuk helix.



Interpretasi

- 1 Kita mengetahui bahwa $\kappa(s) = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2+b^2}$ dan $\tau(s) = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2+b^2}$. Katakan $a > 0$ dan $b > 0$
- 2 Jika $b = 0$, maka persamaan helix memperlihatkan bahwa helix menjadi hanya lingkaran. Perhatikan $\tau = 0$.
- 3 Jika $b \rightarrow \infty$, apa bentuk helix.
- 4 Perhatikan $\kappa(s) \rightarrow 0, \tau(s) \rightarrow 0$



Interpretasi

- 1 Kita mengetahui bahwa $\kappa(s) = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2+b^2}$ dan $\tau(s) = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2+b^2}$. Katakan $a > 0$ dan $b > 0$
- 2 Jika $b = 0$, maka persamaan helix memperlihatkan bahwa helix menjadi hanya lingkaran. Perhatikan $\tau = 0$.
- 3 Jika $b \rightarrow \infty$, apa bentuk helix.
- 4 Perhatikan $\kappa(s) \rightarrow 0, \tau(s) \rightarrow 0$
- 5 Untuk $b = 0, \kappa(s) = \frac{1}{a}$ berkaitan dengan jari-jari.



Rumus Frenet untuk sebarang parameterisasi

❶ Misalkan $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$

Untuk mencari $\mathbf{N}$, kita harus menghitung

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{T}}{ds} &= \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\|\alpha'(t)\|} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{(1-t^2)^2 + (2t)^2 + (1+t^2)^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2t \frac{t^2-1}{(t^2+1)^2} - 2 \frac{t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1} \right)\end{aligned}$$



Rumus Frenet untuk sebarang parameterisasi

❶ Misalkan $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$

❷ Kita menghitung

$$\alpha'(t) = (3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2) = 3(1 - t^2, 2t, 1 + t^2)$$

Untuk mencari $\mathbf{N}$, kita harus menghitung

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{ds} &= \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\|\alpha'(t)\|} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{(1-t^2)^2 + (2t)^2 + (1+t^2)^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2t \frac{t^2-1}{(t^2+1)^2} - 2 \frac{t}{t^2+1}, \frac{t}{t^2+1}, \frac{t}{t^2+1} \right) \end{aligned}$$



Rumus Frenet untuk sebarang parameterisasi

- 1 Misalkan $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$
- 2 Kita menghitung
 $\alpha'(t) = (3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2) = 3(1 - t^2, 2t, 1 + t^2)$
- 3 Dengan demikian $\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \alpha'(t) =$
 $\frac{3}{3\sqrt{2}(1+t^2)} (1 - t^2, 2t, 1 + t^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, 1 \right)$

Untuk mencari $\mathbf{N}$, kita harus menghitung

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{ds} &= \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\|\alpha'(t)\|} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{(1-t^2)^2 + (2t)^2 + (1+t^2)^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2t \frac{t^2-1}{(t^2+1)^2} - 2 \frac{t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}, 1 \right) \end{aligned}$$



Rumus Frenet untuk sebarang parameterisasi

① Untuk mencari **N**, kita harus menghitung

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{T}}{ds} &= \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\|\alpha'(t)\|} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{-4t}{(t^2 + 1)^2}, \frac{2(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2}, 0 \right)\end{aligned}$$



Rumus Frenet untuk sebarang parameterisasi

- ❶ Untuk mencari **N**, kita harus menghitung

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{T}}{ds} &= \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\|\alpha'(t)\|} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{-4t}{(t^2 + 1)^2}, \frac{2(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2}, 0 \right)\end{aligned}$$

- ❷ Dengan demikian

$$\kappa(t) = \frac{1}{3} \sqrt{\left(\frac{-4t}{(t^2 + 1)^2} \right)^2 + \left(\frac{2(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2} \right)^2} = \frac{2}{3(t^2 + 1)}$$

dan

$$\mathbf{N}(t) = \left(-\frac{2t}{t^2 + 1}, \frac{(1 - t^2)}{t^2 + 1}, 0 \right)$$



Rumus Frenet untuk sebarang parameterisasi

➊ Selanjutnya

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2t}{1+t^2} & 1 \\ -\frac{2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1-t^2}{1+t^2}, -\frac{2t}{1+t^2}, 0 \right)$$



Rumus Frenet untuk sebarang parameterisasi

1 Selanjutnya

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2t}{1+t^2} & 1 \\ -\frac{2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1-t^2}{1+t^2}, -\frac{2t}{1+t^2}, 0 \right)$$

2 dan $\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}}{dt} \times \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \dots$



Rumus Frenet untuk sebarang parameterisasi

1 Selanjutnya

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2t}{1+t^2} & 1 \\ -\frac{2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1-t^2}{1+t^2}, -\frac{2t}{1+t^2}, 0 \right)$$

2 dan $\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}}{dt} \times \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \dots$

3 Karen $\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau \mathbf{N}$ maka

$$\tau = \left\| \frac{d\mathbf{B}}{ds} \right\| = \frac{1}{3(1+t^2)^2} \text{ Perlu di cek}$$



Rumus Percepatan

1 Kita mengetahui bahwa

$$\mathbf{T}(s(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{\alpha'(t)}{v(t)} \text{ atau } \alpha'(t) = v(t) \mathbf{T}(s(t))$$



Rumus Percepatan

- 1 Kita mengetahui bahwa

$$\mathbf{T}(s(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{\alpha'(t)}{v(t)} \text{ atau } \alpha'(t) = v(t) \mathbf{T}(s(t))$$

- 2 Dengan demikian

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= v'(t) \mathbf{T}(s(t)) + v(t) \mathbf{T}'(s(t)) s'(t) \\ &= v'(t) \mathbf{T}(s(t)) + v(t)^2 \mathbf{T}'(s(t)) \\ &= v'(t) \mathbf{T}(s(t)) + v(t)^2 \kappa(t) \mathbf{N}(s(t)) \end{aligned}$$



Rumus Percepatan

- 1 Kita mengetahui bahwa

$$\mathbf{T}(s(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{\alpha'(t)}{v(t)} \text{ atau } \alpha'(t) = v(t) \mathbf{T}(s(t))$$

- 2 Dengan demikian

$$\begin{aligned}\alpha''(t) &= v'(t) \mathbf{T}(s(t)) + v(t) \mathbf{T}'(s(t)) s'(t) \\ &= v'(t) \mathbf{T}(s(t)) + v(t)^2 \mathbf{T}'(s(t)) \\ &= v'(t) \mathbf{T}(s(t)) + v(t)^2 \kappa(t) \mathbf{N}(s(t))\end{aligned}$$

- 3 Jadi, percepatan benda tersebut terbagi menjadi dua.



Rumus Percepatan

- 1 Kita mengetahui bahwa

$$\mathbf{T}(s(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{\alpha'(t)}{v(t)} \text{ atau } \alpha'(t) = v(t) \mathbf{T}(s(t))$$

- 2 Dengan demikian

$$\begin{aligned}\alpha''(t) &= v'(t) \mathbf{T}(s(t)) + v(t) \mathbf{T}'(s(t)) s'(t) \\ &= v'(t) \mathbf{T}(s(t)) + v(t)^2 \mathbf{T}'(s(t)) \\ &= v'(t) \mathbf{T}(s(t)) + v(t)^2 \kappa(t) \mathbf{N}(s(t))\end{aligned}$$

- 3 Jadi, percepatan benda tersebut terbagi menjadi dua.

- 3 Sepanjang lengkungan (sepanjang vektor singgung), besarnya turunan dari laju.



Rumus Percepatan

- 1 Kita mengetahui bahwa

$$\mathbf{T}(s(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{\alpha'(t)}{v(t)} \text{ atau } \alpha'(t) = v(t) \mathbf{T}(s(t))$$

- 2 Dengan demikian

$$\begin{aligned}\alpha''(t) &= v'(t) \mathbf{T}(s(t)) + v(t) \mathbf{T}'(s(t)) s'(t) \\ &= v'(t) \mathbf{T}(s(t)) + v(t)^2 \mathbf{T}'(s(t)) \\ &= v'(t) \mathbf{T}(s(t)) + v(t)^2 \kappa(t) \mathbf{N}(s(t))\end{aligned}$$

- 3 Jadi, percepatan benda tersebut terbagi menjadi dua.
- 3 Sepanjang lengkungan (sepanjang vektor singgung), besarnya turunan dari laju.
 - 3 Sepanjang vektor normal, besarnya laju kuadrat kali kappa (Ingat rumus SMA untuk gerak melingkar)



Rumus Percepatan

❶ Kita mengetahui $\alpha''(t) = v'(t) \mathbf{T}(s(t)) + v(t)^2 \kappa(t) \mathbf{N}(s(t))$

Theorem

Proof.



Rumus Percepatan

- 1 Kita mengetahui $\alpha''(t) = v'(t) \mathbf{T}(s(t)) + v(t)^2 \kappa(t) \mathbf{N}(s(t))$
- 2 Jika kita mengetahui kecepatan dan percepatan, kita dapat mengetahui kelengkungan

Theorem

Proof.



Rumus Percepatan

- 1 Kita mengetahui $\alpha''(t) = v'(t) \mathbf{T}(s(t)) + v(t)^2 \kappa(t) \mathbf{N}(s(t))$
- 2 Jika kita mengetahui kecepatan dan percepatan, kita dapat mengetahui kelengkungan

Theorem

- 1 *Jika diketahui $\alpha'(t)$ dan $\alpha''(t)$, maka*

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

Proof.



Rumus Percepatan

- 1 Kita mengetahui $\alpha''(t) = v'(t) \mathbf{T}(s(t)) + v(t)^2 \kappa(t) \mathbf{N}(s(t))$
- 2 Jika kita mengetahui kecepatan dan percepatan, kita dapat mengetahui kelengkungan

Theorem

- 1 Jika diketahui $\alpha'(t)$ dan $\alpha''(t)$, maka

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

Proof.

- 1 Kita cukup menghitung

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (v\mathbf{T}) \times (v'\mathbf{T} + \kappa v^2 \mathbf{N}) = \kappa v^3 (\mathbf{T} \times \mathbf{N}).$$



Rumus Percepatan

❶ Kita mengetahui $\alpha''(t) = v'(t) \mathbf{T}(s(t)) + v(t)^2 \kappa(t) \mathbf{N}(s(t))$

Proof.





Rumus Percepatan

- ❶ Kita mengetahui $\alpha''(t) = v'(t) \mathbf{T}(s(t)) + v(t)^2 \kappa(t) \mathbf{N}(s(t))$

Proof.

- ❶ Kita cukup menghitung

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (vT) \times (v'T + \kappa v^2 N) = \kappa v^3 (T \times N)$$





Akibat Rumus Frenet

Theorem

- *Suatu lengkungan di ruang merupakan garis jika dan hanya jika $\kappa \equiv 0$.*

Proof.





Akibat Rumus Frenet

Theorem

- Suatu lengkungan di ruang merupakan garis jika dan hanya jika $\kappa \equiv 0$.

Proof.

- 1 Jika lengkungan merupakan garis, maka $\alpha(s) = s\mathbf{v} + \mathbf{c}$ dan dapat dihitung bahwa $\kappa \equiv 0$.





Akibat Rumus Frenet

Theorem

- Suatu lengkungan di ruang merupakan garis jika dan hanya jika $\kappa \equiv 0$.

Proof.

- 1 Jika lengkungan merupakan garis, maka $\alpha(s) = s\mathbf{v} + \mathbf{c}$ dan dapat dihitung bahwa $\kappa \equiv 0$.
- 2 Sebaliknya ...





Akibat Rumus Frenet

Theorem

- *Suatu lengkungan di ruang merupakan garis jika dan hanya jika $\kappa \equiv 0$.*

Proof.





Akibat Rumus Frenet

Theorem

- Suatu lengkungan di ruang merupakan garis jika dan hanya jika $\kappa \equiv 0$.

Proof.

- 1 Misalkan $\kappa \equiv 0$, karena $\mathbf{T}'(s) = \kappa(s) \mathbf{N}(s)$, maka $\mathbf{T}'(s) = 0$





Akibat Rumus Frenet

Theorem

- Suatu lengkungan di ruang merupakan garis jika dan hanya jika $\kappa \equiv 0$.

Proof.

- 1 Misalkan $\kappa \equiv 0$, karena $\mathbf{T}'(s) = \kappa(s) \mathbf{N}(s)$, maka $\mathbf{T}'(s) = 0$
- 2 Dengan demikian $\mathbf{T}(s) = \mathbf{T}(0) + \mathbf{v}$ atau $\mathbf{T}(s) = \mathbf{T}(0)$





Akibat Rumus Frenet

Theorem

- Suatu lengkungan di ruang merupakan garis jika dan hanya jika $\kappa \equiv 0$.

Proof.

- 1 Misalkan $\kappa \equiv 0$, karena $\mathbf{T}'(s) = \kappa(s) \mathbf{N}(s)$, maka $\mathbf{T}'(s) = 0$
- 2 Dengan demikian $\mathbf{T}(s) = \mathbf{T}(0) + \mathbf{v}$ atau $\mathbf{T}(s) = \mathbf{T}(0)$
- 3 Dengan demikian $\alpha'(s) = \mathbf{T}_0$ dan $\alpha(s) = \alpha(0) + \mathbf{T}_0 s$.





Akibat Rumus Frenet

Theorem

- Suatu lengkungan di ruang merupakan garis jika dan hanya jika $\kappa \equiv 0$.

Proof.

- 1 Misalkan $\kappa \equiv 0$, karena $\mathbf{T}'(s) = \kappa(s) \mathbf{N}(s)$, maka $\mathbf{T}'(s) = 0$
- 2 Dengan demikian $\mathbf{T}(s) = \mathbf{T}(0) + \mathbf{v}$ atau $\mathbf{T}(s) = \mathbf{T}(0)$
- 3 Dengan demikian $\alpha'(s) = \mathbf{T}_0$ dan $\alpha(s) = \alpha(0) + \mathbf{T}_0 s$.
- 4 Ini merupakan parameterisasi dari garis.





Akibat Rumus Frenet

Example

- Misalkan garis singgung lengkungan selalu melalui satu titik tertentu. Apa jenis lengkungan ini?

Solution



Akibat Rumus Frenet

Example

- Misalkan garis singgung lengkungan selalu melalui satu titik tertentu. Apa jenis lengkungan ini?

Solution

- 1 *Kita dapat anggap bahwa titik tersebut titik O . Persamaan garis singgung $\beta(t) = \alpha(s) + t\mathbf{T}(s)$.*



Akibat Rumus Frenet

Example

- Misalkan garis singgung lengkungan selalu melalui satu titik tertentu. Apa jenis lengkungan ini?

Solution

- 1 Kita dapat anggap bahwa titik tersebut titik O . Persamaan garis singgung $\beta(t) = \alpha(s) + t\mathbf{T}(s)$.
- 2 Selalu ada t sehingga $0 = \alpha(s) + t\mathbf{T}(s)$ dan $-\langle \alpha(s), \mathbf{T}(s) \rangle = t$ atau tuliskan $t = -\lambda(s)$



Akibat Rumus Frenet

Example

- Misalkan garis singgung lengkungan selalu melalui satu titik tertentu. Apa jenis lengkungan ini?

Solution

- 1 Kita dapat anggap bahwa titik tersebut titik O . Persamaan garis singgung $\beta(t) = \alpha(s) + t\mathbf{T}(s)$.
- 2 Selalu ada t sehingga $0 = \alpha(s) + t\mathbf{T}(s)$ dan $-\langle \alpha(s), \mathbf{T}(s) \rangle = t$ atau tuliskan $t = -\lambda(s)$
- 3 Dengan demikian $\alpha(s) = \lambda(s)\mathbf{T}(s)$.



Akibat Rumus Frenet

Example

- Misalkan garis singgung lengkungan selalu melalui satu titik tertentu. Apa jenis lengkungan ini?

Solution

- 1 Kita dapat anggap bahwa titik tersebut titik O . Persamaan garis singgung $\beta(t) = \alpha(s) + t\mathbf{T}(s)$.
- 2 Selalu ada t sehingga $0 = \alpha(s) + t\mathbf{T}(s)$ dan $-\langle \alpha(s), \mathbf{T}(s) \rangle = t$ atau tuliskan $t = -\lambda(s)$
- 3 Dengan demikian $\alpha(s) = \lambda(s)\mathbf{T}(s)$.
- 4 Dengan menurunkan kedua ruas, diperoleh



Akibat Rumus Frenet

Solution

① Dengan demikian $\alpha(s) = \lambda(s) \mathbf{T}(s)$.



Akibat Rumus Frenet

Solution

- 1 Dengan demikian $\alpha(s) = \lambda(s) \mathbf{T}(s)$.
- 2 Dengan menurunkan kedua ruas, diperoleh

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= \mathbf{T}(s) = \lambda(s) \mathbf{T}'(s) + \lambda'(s) \mathbf{T}(s) \\ &= \lambda(s) \kappa(s) \mathbf{N}(s) + \lambda'(s) \mathbf{T}(s)\end{aligned}$$



Akibat Rumus Frenet

Solution

- 1 Dengan demikian $\alpha(s) = \lambda(s) \mathbf{T}(s)$.
- 2 Dengan menurunkan kedua ruas, diperoleh

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= \mathbf{T}(s) = \lambda(s) \mathbf{T}'(s) + \lambda'(s) \mathbf{T}(s) \\ &= \lambda(s) \kappa(s) \mathbf{N}(s) + \lambda'(s) \mathbf{T}(s)\end{aligned}$$

- 3 Jadi $\lambda'(s) = 1$ dan $\lambda(s) \kappa(s) = 0$



Akibat Rumus Frenet

Solution

- 1 Dengan demikian $\alpha(s) = \lambda(s) \mathbf{T}(s)$.
- 2 Dengan menurunkan kedua ruas, diperoleh

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= \mathbf{T}(s) = \lambda(s) \mathbf{T}'(s) + \lambda'(s) \mathbf{T}(s) \\ &= \lambda(s) \kappa(s) \mathbf{N}(s) + \lambda'(s) \mathbf{T}(s)\end{aligned}$$

- 3 Jadi $\lambda'(s) = 1$ dan $\lambda(s) \kappa(s) = 0$
- 4 Dengan demikian $\lambda(s) = s + c$ dan $\kappa(s) = 0$. Oleh karena itu lengkungan merupakan garis.



Akibat Rumus Frenet

Theorem

- *Lengkungan di ruang terletak di bidang jika dan hanya jika $\tau(s) \equiv 0$. Lengkungan di bidang dengan kelengkungan tidak sama dengan nol hanyalah lingkaran.*

Proof.



Akibat Rumus Frenet

Theorem

- *Lengkungan di ruang terletak di bidang jika dan hanya jika $\tau(s) \equiv 0$. Lengkungan di bidang dengan kelengkungan tidak sama dengan nol hanyalah lingkaran.*

Proof.

- 1 Jika lengkungan terletak di bidang, maka bidang tersebut tersebut tentu dibangun oleh $\mathbf{T}(s)$ dan $\mathbf{N}(s)$ dan

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$$

konstan.



Akibat Rumus Frenet

Theorem

- *Lengkungan di ruang terletak di bidang jika dan hanya jika $\tau(s) \equiv 0$. Lengkungan di bidang dengan kelengkungan tidak sama dengan nol hanyalah lingkaran.*

Proof.

- 1 Jika lengkungan terletak di bidang, maka bidang tersebut tersebut tentu dibangun oleh $\mathbf{T}(s)$ dan $\mathbf{N}(s)$ dan

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$$

konstan.

- 2 Oleh karena itu $\mathbf{B}'(s) = 0 = -\tau(s) \mathbf{N}(s)$.



Akibat Rumus Frenet

Theorem

- *Lengkungan di ruang terletak di bidang jika dan hanya jika $\tau(s) \equiv 0$. Lengkungan di bidang dengan kelengkungan tidak sama dengan nol hanyalah lingkaran.*

Proof.

- 1 Jika lengkungan terletak di bidang, maka bidang tersebut tersebut tentu dibangun oleh $\mathbf{T}(s)$ dan $\mathbf{N}(s)$ dan

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$$

konstan.

- 2 Oleh karena itu $\mathbf{B}'(s) = 0 = -\tau(s) \mathbf{N}(s)$.

3 Jadi $\tau(s) = 0$



Akibat Rumus Frenet

Theorem

- *Lengkungan di ruang terletak di bidang jika dan hanya jika $\tau(s) \equiv 0$.*

Proof.



Akibat Rumus Frenet

Theorem

- *Lengkungan di ruang terletak di bidang jika dan hanya jika $\tau(s) \equiv 0$.*

Proof.

1. Sebaliknya, perhatikan $f(s) = \mathbf{f}(s) \cdot \mathbf{B}(0)$.



Akibat Rumus Frenet

Theorem

- *Lengkungan di ruang terletak di bidang jika dan hanya jika $\tau(s) \equiv 0$.*

Proof.

- 1 Sebaliknya, perhatikan $f'(s) = \mathbf{f}(s) \cdot \mathbf{B}(0)$.
- 2 Dengan mencari turunan

$$f'(s) = \mathbf{f}'(s) \cdot \mathbf{B}(0) = \mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{B}(0) = 0$$



Akibat Rumus Frenet

Theorem

- *Lengkungan di ruang terletak di bidang jika dan hanya jika $\tau(s) \equiv 0$.*

Proof.

- 1 Sebaliknya, perhatikan $f'(s) = \mathbf{f}(s) \cdot \mathbf{B}(0)$.
- 2 Dengan mencari turunan

$$f'(s) = \mathbf{f}'(s) \cdot \mathbf{B}(0) = \mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{B}(0) = 0$$

- 3 Jadi $f(s) = c$ untuk suatu konstan c .



Akibat Rumus Frenet

Theorem

- *Lengkungan di ruang terletak di bidang jika dan hanya jika $\tau(s) \equiv 0$.*

Proof.

1 Sebaliknya, perhatikan $f(s) = \mathbf{ff}(s) \cdot \mathbf{B}(0)$.

2 Dengan mencari turunan

$$f'(s) = \mathbf{ff}'(s) \cdot \mathbf{B}(0) = \mathbf{T}(s) \cdot \mathbf{B}(0) = 0$$

3 Jadi $f(s) = c$ untuk suatu konstan c .

4 Dengan demikian $\mathbf{ff}(s) \cdot \mathbf{B}(0) = c$.



Akibat Rumus Frenet

Theorem

- *Lengkungan di bidang dengan kelengkungan konstan merupakan bagian dari lingkaran.*

Proof.



Akibat Rumus Frenet

Theorem

- *Lengkungan di bidang dengan kelengkungan konstan merupakan bagian dari lingkaran.*

Proof.

- 1 Jika α mempunyai kelengkungan konstan, perhatikan lengkungan baru $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa} \mathbf{N}(s)$



Akibat Rumus Frenet

Theorem

- *Lengkungan di bidang dengan kelengkungan konstan merupakan bagian dari lingkaran.*

Proof.

- 1 Jika α mempunyai kelengkungan konstan, perhatikan lengkungan baru $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa} \mathbf{N}(s)$
- 2 Turunannya

$$\begin{aligned}\beta'(s) &= \alpha'(s) + \frac{1}{\kappa} \mathbf{N}'(s) \\ &= \mathbf{T}(s) + \frac{1}{\kappa} (-\kappa \mathbf{T}(s)) = 0\end{aligned}$$



Akibat Rumus Frenet

Proof.

- 1 Jika α mempunyai kelengkungan konstan, perhatikan lengkungan baru $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa} \mathbf{N}(s)$





Akibat Rumus Frenet

Proof.

- 1 Jika α mempunyai kelengkungan konstan, perhatikan lengkungan baru $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa} \mathbf{N}(s)$
- 2 Turunannya $\beta'(s) = 0$





Akibat Rumus Frenet

Proof.

- 1 Jika α mempunyai kelengkungan konstan, perhatikan lengkungan baru $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa} \mathbf{N}(s)$
- 2 Turunannya $\beta'(s) = 0$
- 3 Jadi $\beta'(s) = 0$ atau $\beta(s) = P$ konstan.





Akibat Rumus Frenet

Proof.

- ➊ Jika α mempunyai kelengkungan konstan, perhatikan lengkungan baru $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa} \mathbf{N}(s)$
- ➋ Turunannya $\beta'(s) = 0$
- ➌ Jadi $\beta'(s) = 0$ atau $\beta(s) = P$ konstan.
- ➍ Jadi $\|\alpha(s) - P\| = \left\| \frac{1}{\kappa} \mathbf{N}(s) \right\| = \text{konstan}$





Perumuman Helix

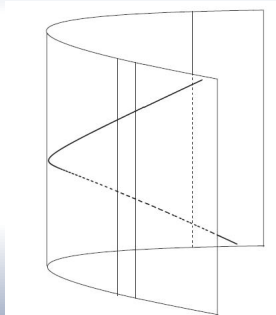
- 1 Lengkungan disebut perumuman helix jika vektor singgung selalu membentuk sudut tertentu terhadap suatu vektor.



Perumuman Helix

- 1 Lengkungan disebut perumuman helix jika vektor singgung selalu membentuk sudut tertentu terhadap suatu vektor.

2

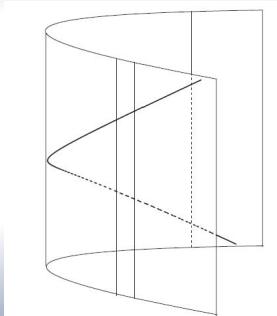




Perumuman Helix

- 1 Lengkungan disebut perumuman helix jika vektor singgung selalu membentuk sudut tertentu terhadap suatu vektor.

2



- 3 $\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t, bt)$ dan $\alpha'(t) = (-R \sin t, R \cos t, b)$,
 $\langle \alpha'(t), \mathbf{k} \rangle = b$ dengan $\mathbf{k}$ vektor satuan $(0, 0, 1)$.



Perumuman Helix

Theorem

- *Suatu lengkungan adalah perumuman helix jika dan hanya jika $\frac{\tau}{\kappa}$ konstan*

Proof.



Perumuman Helix

Theorem

- Suatu lengkungan adalah perumuman helix jika dan hanya jika $\frac{\tau}{\kappa}$ konstan

Proof.

- 1 Misalkan α lengkungan perumuman helix, maka ada vektor **A** sehingga $\langle \mathbf{T}, \mathbf{A} \rangle = \cos \theta$ konstan.



Perumuman Helix

Theorem

- Suatu lengkungan adalah perumuman helix jika dan hanya jika $\frac{\tau}{\kappa}$ konstan

Proof.

- 1 Misalkan α lengkungan perumuman helix, maka ada vektor $\mathbf{A}$ sehingga $\langle \mathbf{T}, \mathbf{A} \rangle = \cos \theta$ konstan.
- 2 Dengan turunan, maka $\langle \kappa \mathbf{N}, \mathbf{A} \rangle = 0$ atau $\langle \mathbf{N}, \mathbf{A} \rangle = 0$



Perumuman Helix

Theorem

- Suatu lengkungan adalah perumuman helix jika dan hanya jika $\frac{\tau}{\kappa}$ konstan

Proof.

- 1 Misalkan α lengkungan perumuman helix, maka ada vektor $\mathbf{A}$ sehingga $\langle \mathbf{T}, \mathbf{A} \rangle = \cos \theta$ konstan.
- 2 Dengan turunan, maka $\langle \kappa \mathbf{N}, \mathbf{A} \rangle = 0$ atau $\langle \mathbf{N}, \mathbf{A} \rangle = 0$
- 3 Oleh karena itu $\mathbf{A}$ berada di bidang yang dibangun oleh $\mathbf{T}$ dan $\mathbf{B}$. Jadi

$$\langle \mathbf{B}, \mathbf{A} \rangle = \pm \sin \theta$$



Perumuman Helix

Proof.

- ① Kita mempunyai $\langle \mathbf{T}, \mathbf{A} \rangle = \cos \theta$ konstan. Dengan turunan, $\langle \mathbf{N}, \mathbf{A} \rangle = 0$. Oleh karena itu $\mathbf{A}$ berada di bidang yang dibangun oleh $\mathbf{T}$ dan $\mathbf{B}$. Jadi

$$\langle \mathbf{B}, \mathbf{A} \rangle = \pm \sin \theta$$





Perumuman Helix

Proof.

- ① Kita mempunyai $\langle \mathbf{T}, \mathbf{A} \rangle = \cos \theta$ konstan. Dengan turunan, $\langle \mathbf{N}, \mathbf{A} \rangle = 0$. Oleh karena itu $\mathbf{A}$ berada di bidang yang dibangun oleh $\mathbf{T}$ dan $\mathbf{B}$. Jadi

$$\langle \mathbf{B}, \mathbf{A} \rangle = \pm \sin \theta$$

- ② Sekali lagi turunan $\langle \mathbf{N}, \mathbf{A} \rangle = 0$, maka diperoleh $\langle (-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}), \mathbf{A} \rangle = 0$ atau $-\kappa \cos \theta \pm \tau \sin \theta = 0$ atau $\frac{\tau}{\kappa} =$ konstan.





Perumuman Helix

Theorem

- *Suatu lengkungan adalah perumuman helix jika dan hanya jika $\frac{\tau}{\kappa}$ konstan*

Proof.



Perumuman Helix

Theorem

- Suatu lengkungan adalah perumuman helix jika dan hanya jika $\frac{\tau}{\kappa}$ konstan

Proof.

- 1 Sebaliknya, jika $\frac{\tau}{\kappa}$ konstan, akan dibuktikan ada vektor konstan sehingga $\langle \mathbf{T}, \mathbf{A} \rangle$ konstan.



Perumuman Helix

Theorem

- Suatu lengkungan adalah perumuman helix jika dan hanya jika $\frac{\tau}{\kappa}$ konstan

Proof.

- 1 Sebaliknya, jika $\frac{\tau}{\kappa}$ konstan, akan dibuktikan ada vektor konstan sehingga $\langle \mathbf{T}, \mathbf{A} \rangle$ konstan.
- 2 Karena $\frac{\tau}{\kappa} = \cot \theta$ untuk suatu $\theta \in (0, \pi)$. Definisikan $\mathbf{A}(s) = \mathbf{T}(s) \cos \theta + \mathbf{B}(s) \sin \theta$



Perumuman Helix

Theorem

- Suatu lengkungan adalah perumuman helix jika dan hanya jika $\frac{\tau}{\kappa}$ konstan

Proof.

- 1 Sebaliknya, jika $\frac{\tau}{\kappa}$ konstan, akan dibuktikan ada vektor konstan sehingga $\langle \mathbf{T}, \mathbf{A} \rangle$ konstan.
- 2 Karena $\frac{\tau}{\kappa} = \cot \theta$ untuk suatu $\theta \in (0, \pi)$. Definisikan $\mathbf{A}(s) = \mathbf{T}(s) \cos \theta + \mathbf{B}(s) \sin \theta$
- 3 Dengan turunan

$$\mathbf{A}'(s) = \kappa \mathbf{N}(s) \cos \theta - \tau \mathbf{N}(s) \sin \theta = 0$$



Perumuman Helix

Proof.

- 1 Sebaliknya, jika $\frac{\tau}{\kappa}$ konstan, akan dibuktikan ada vektor konstan sehingga $\langle \mathbf{T}, \mathbf{A} \rangle$ konstan.





Perumuman Helix

Proof.

- 1 Sebaliknya, jika $\frac{\tau}{\kappa}$ konstan, akan dibuktikan ada vektor konstan sehingga $\langle \mathbf{T}, \mathbf{A} \rangle$ konstan.
- 2 Karena $\frac{\tau}{\kappa} = \cot \theta$ untuk suatu $\theta \in (0, \pi)$. Definisikan $\mathbf{A}(s) = \mathbf{T}(s) \cos \theta + \mathbf{B}(s) \sin \theta$





Perumuman Helix

Proof.

- 1 Sebaliknya, jika $\frac{\tau}{\kappa}$ konstan, akan dibuktikan ada vektor konstan sehingga $\langle \mathbf{T}, \mathbf{A} \rangle$ konstan.
- 2 Karena $\frac{\tau}{\kappa} = \cot \theta$ untuk suatu $\theta \in (0, \pi)$. Definisikan $\mathbf{A}(s) = \mathbf{T}(s) \cos \theta + \mathbf{B}(s) \sin \theta$
- 3 Dengan turunan $\mathbf{A}'(s) = \kappa \mathbf{N}(s) \cos \theta - \tau \mathbf{N}(s) \sin \theta = 0$





Perumuman Helix

Proof.

- 1 Sebaliknya, jika $\frac{\tau}{\kappa}$ konstan, akan dibuktikan ada vektor konstan sehingga $\langle \mathbf{T}, \mathbf{A} \rangle$ konstan.
- 2 Karena $\frac{\tau}{\kappa} = \cot \theta$ untuk suatu $\theta \in (0, \pi)$. Definisikan $\mathbf{A}(s) = \mathbf{T}(s) \cos \theta + \mathbf{B}(s) \sin \theta$
- 3 Dengan turunan $\mathbf{A}'(s) = \kappa \mathbf{N}(s) \cos \theta - \tau \mathbf{N}(s) \sin \theta = 0$
- 4 Jadi, $\mathbf{A}(s)$ konstan terhadap s , dengan vektor satuan $\mathbf{A}$





Perumuman Helix

Proof.

- 1 Sebaliknya, jika $\frac{\tau}{\kappa}$ konstan, akan dibuktikan ada vektor konstan sehingga $\langle \mathbf{T}, \mathbf{A} \rangle$ konstan.
- 2 Karena $\frac{\tau}{\kappa} = \cot \theta$ untuk suatu $\theta \in (0, \pi)$. Definisikan $\mathbf{A}(s) = \mathbf{T}(s) \cos \theta + \mathbf{B}(s) \sin \theta$
- 3 Dengan turunan $\mathbf{A}'(s) = \kappa \mathbf{N}(s) \cos \theta - \tau \mathbf{N}(s) \sin \theta = 0$
- 4 Jadi, $\mathbf{A}(s)$ konstan terhadap s , dengan vektor satuan $\mathbf{A}$
- 5 Karena $\mathbf{A} = \mathbf{T}(s) \cos \theta + \mathbf{B}(s) \sin \theta$, maka

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{T}(s) \rangle = \cos \theta$$





Karakterisasi Lokal dari Lengkungan

Theorem

- Misalkan α lengkungan licin ($\mathcal{C}^3$ atau lebih) yang diparameterisasi dengan panjang lengkungan. Jika $\alpha(0) = 0$, maka untuk s cukup dekat dengan 0, maka

$$\begin{aligned}\alpha(s) = & \left(s - \frac{\kappa_0^2}{6}s^3 + \dots \right) \mathbf{T}(0) + \left(\frac{\kappa_0}{2}s^2 + \frac{\kappa'_0}{6}s^3 + \dots \right) \mathbf{N}(0) \\ & + \left(\frac{\kappa_0\tau_0}{6}s^3 + \dots \right) \mathbf{B}(0)\end{aligned}$$

dengan κ_0, τ_0 dan κ'_0 masing-masing menyatakan nilai κ, τ, κ' di $s = 0$ dan $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\tau}{s^3} = 0$



Karakterisasi Lokal dari Lengkungan

Proof.

- 1 Dengan menggunakan Teorema Taylor

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s\alpha'(0) + s^2 \frac{\alpha''(0)}{2!} + s^3 \frac{\alpha'''(0)}{3!} + \dots$$

dengan $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\alpha'''}{s^3} = 0$.



Karakterisasi Lokal dari Lengkungan

Proof.

- 1 Dengan menggunakan Teorema Taylor

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s\alpha'(0) + s^2 \frac{\alpha''(0)}{2!} + s^3 \frac{\alpha'''(0)}{3!} + \dots$$

dengan $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\alpha(s) - \alpha(0) - s\alpha'(0)}{s^3} = 0$.

- 2 Kita mengetahui bahwa $\alpha'(0) = \mathbf{T}(0)$, dan $\alpha''(0) = \mathbf{T}'(0) = \kappa_0 \mathbf{N}(0)$



Karakterisasi Lokal dari Lengkungan

Proof.

- 1 Dengan menggunakan Teorema Taylor

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s\alpha'(0) + s^2 \frac{\alpha''(0)}{2!} + s^3 \frac{\alpha'''(0)}{3!} + \dots$$

dengan $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\dots}{s^3} = 0$.

- 2 Kita mengetahui bahwa $\alpha'(0) = \mathbf{T}(0)$, dan $\alpha''(0) = \mathbf{T}'(0) = \kappa_0 \mathbf{N}(0)$
- 3 Sekali lagi $\alpha''(s) = \kappa(s) \mathbf{N}(s)$ diturunkan, akan diperoleh

$$\begin{aligned}\alpha'''(0) &= \kappa'_0 \mathbf{N}(0) + \kappa_0 \mathbf{N}'(0) \\ &= \kappa'_0 \mathbf{N}(0) + \kappa_0 [-\kappa_0 \mathbf{T}(0) + \tau_0 \mathbf{B}(0)] + \dots\end{aligned}$$



Karakterisasi Lokal dari Lengkungan

Proof.

- 1 Dengan menggunakan Teorema Taylor

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s\alpha'(0) + s^2 \frac{\alpha''(0)}{2!} + s^3 \frac{\alpha'''(0)}{3!} + \dots$$



Karakterisasi Lokal dari Lengkungan

Proof.

- 1 Dengan menggunakan Teorema Taylor

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s\alpha'(0) + s^2 \frac{\alpha''(0)}{2!} + s^3 \frac{\alpha'''(0)}{3!} + \dots$$

- 2 $\alpha'(0) = \mathbf{T}(0)$, dan $\alpha''(0) = \mathbf{T}'(0) = \kappa_0 \mathbf{N}(0)$ dan



Karakterisasi Lokal dari Lengkungan

Proof.

- ❶ Dengan menggunakan Teorema Taylor

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s\alpha'(0) + s^2 \frac{\alpha''(0)}{2!} + s^3 \frac{\alpha'''(0)}{3!} + \dots$$

- ❷ $\alpha'(0) = \mathbf{T}(0)$, dan $\alpha''(0) = \mathbf{T}'(0) = \kappa_0 \mathbf{N}(0)$ dan

- ❸ Sekali lagi $\alpha''(s) = \kappa(s) \mathbf{N}(s)$ diturunkan, akan diperoleh
 $\alpha'''(0) = \kappa'_0 \mathbf{N}(0) + \kappa_0 [-\kappa_0 \mathbf{T}(0) + \tau_0 \mathbf{B}(0)] + \dots$



Karakterisasi Lokal dari Lengkungan

Proof.

- ❶ Dengan menggunakan Teorema Taylor

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s\alpha'(0) + s^2 \frac{\alpha''(0)}{2!} + s^3 \frac{\alpha'''(0)}{3!} + \dots$$

- ❷ $\alpha'(0) = \mathbf{T}(0)$, dan $\alpha''(0) = \mathbf{T}'(0) = \kappa_0 \mathbf{N}(0)$ dan
- ❸ Sekali lagi $\alpha''(s) = \kappa(s) \mathbf{N}(s)$ diturunkan, akan diperoleh $\alpha'''(0) = \kappa'_0 \mathbf{N}(0) + \kappa_0 [-\kappa_0 \mathbf{T}(0) + \tau_0 \mathbf{B}(0)] + \dots$

- ❹ Dengan demikian

$$\alpha(s) = s\mathbf{T}(0) + \frac{1}{2}s^2\kappa_0\mathbf{N}(0) + \frac{1}{6}s^3\left(-\kappa_0^2\mathbf{T}(0) + \kappa'_0\mathbf{N}(0) + \kappa_0\tau_0\mathbf{B}(0)\right) + \dots$$



Karakterisasi Lokal dari Lengkungan

Proof.

① Dengan demikian

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= s\mathbf{T}(0) + \frac{1}{2}s^2\kappa_0\mathbf{N}(0) + \frac{1}{6}s^3\left(-\kappa_0^2\mathbf{T}(0) + \kappa_0'\mathbf{N}(0) + \kappa_0\tau_0\mathbf{B}(0)\right) \\ &= \left(s - \frac{\kappa_0^2}{6}s^3 + \dots\right)\mathbf{T}(0) + \left(\frac{\kappa_0}{2}s^2 + \frac{\kappa_0'}{6}s^3 + \dots\right)\mathbf{N}(0) \\ &\quad + \left(\frac{\kappa_0\tau_0}{6}s^3 + \dots\right)\mathbf{B}(0)\end{aligned}$$





Karakterisasi Lokal dari Lengkungan

Proof.

$$\textcircled{1} \quad \alpha(s) = \left(s - \frac{\kappa_0^2}{6}s^3 + \dots\right) \mathbf{T}(0) + \left(\frac{\kappa_0}{2}s^2 + \frac{\kappa_0'}{6}s^3 + \dots\right) \mathbf{N}(0) + \left(\frac{\kappa_0 \tau_0}{6}s^3 + \dots\right) \mathbf{B}(0)$$

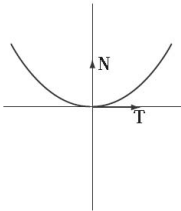


Karakterisasi Lokal dari Lengkungan

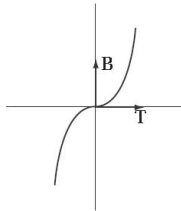
Proof.

$$\textcircled{1} \alpha(s) = \left(s - \frac{\kappa_0^2}{6}s^3 + \dots\right) \mathbf{T}(0) + \left(\frac{\kappa_0}{2}s^2 + \frac{\kappa_0'}{6}s^3 + \dots\right) \mathbf{N}(0) + \left(\frac{\kappa_0\tau_0}{6}s^3 + \dots\right) \mathbf{B}(0)$$

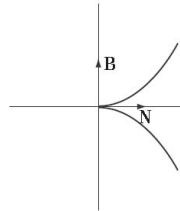
2



osculating plane



rectifying plane



normal plane